

DOTT. ALBINO NAGY

PROFESSORE DI FILOSOFIA AL LICEO MANCINELLI

DI VELLETRI

PRINCIPI DI LOGICA

ESPOSTI

SECONDO LE DOTTRINE MODERNE



TORINO

ERMANN O LOESCHER

FIRENZE

Via Tornabuoni, 20

ROMA

Via del Corso, 307

1891

Proprietà Letteraria

Coi tipi della Società Tip. Cooperativa — Fano 1891.

PREFAZIONE

Di solito ogni autore usa giustificare i suoi scritti con certe ragioni, che agli altri paiono più o meno valide e che egli espone nella prefazione. Son per lo più lacune da colmare, bisogni dagli studiosi fortemente sentiti da soddisfare, od altre cause consimili che incitarono lo scrittore all'opera. Io non so se per un trattato di logica convenga ricorrere a queste spiegazioni: però non vorrei che fosse frainteso il mio divisamento.

Grazie alla cortesia dell'illustre Prof. LUIGI FERRI, mi fu concesso di esporre alla Scuola di Magistero della R. Università di Roma e quindi di riprodurre nella *Rivista italiana di filosofia* (fase. nov.-dic. 1891), alcune considerazioni intorno allo stato attuale ed ai progressi della logica. In esse cercai di porre in luce in quanta più luce era possibile, lo stato veramente desolante in cui si trova questa scienza presso di noi; e mi sforzai d'altra parte di richiamare l'attenzione sul vasto e profondo rivolgimento della logica, a cui concorrono, con attività incessante, i forti studi che si fanno dal nobile popolo inglese, sì in Europa che negli Stati Uniti. Perciò parmi sarebbe un drammatizzare

la situazione il parlare di *lacune* e di *bisogni fortemente sentiti*: perchè, da noi, di tutto questo movimento non c'è nemmeno una lontana eco ¹⁾ e nessuno domanda libri di logica. Ma, conveniamo, appunto le mancanze di questi motivi ci sconsiglia e ci addita un male, che, per quanto sta in noi, vorremmo sanare.

Non voglio essere frainteso. Il mio intendimento è di rendere famigliari in Italia le dottrine della moderna scuola inglese, della quale il presente lavoro raccoglie i risultati, che altrimenti sarebbero difficilmente accessibili, perchè sparsi disordinatamente in un mare di riviste, atti accademici, opuscoli, scritti in inglese, in francese, in tedesco ecc. Questi risultati costituiscono un reale progresso della logica aristotelica e la loro importanza mi sembra tanto grande da non ammettere indugio nel renderli noti.

Come rilevai nel suaccennato lavoro inserito nella *Rivista*, i meriti principali della logica matematica consistono:

1) nella espressione diretta ed immediata dei concetti e delle loro relazioni mediante un adatto simbolismo, indipendente dalle particolarità e dalle variazioni del linguaggio

2) nello studio delle relazioni di più concetti: mentre la logica tradizionale, vincolata al principio psicologico della dicotomia nel giudizio si limitava allo studio delle relazioni di due concetti soltanto (soggetto

1) Con ciò non voglio togliere il merito al chiaro Prof. GIUSEPPE PEANO, dell'Università di Torino che arditamente iniziò nell'88. coll'opera: *Calcolo geometrico.... preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Torino, Bocca, e, negli scritti che cito alla nota 4), e nella Rivista di matematica da lui fondata quest'anno, intrepidamente propugna le nuove dottrine. Però siccome la sua attività è più specialmente rivolta alla matematica ed ai matematici, i suoi studi, purtroppo, furono dagli studiosi di filosofia poco o punto convenientemente conosciuti ed apprezzati.

e predicato). I sign. JEVONS e CLIFFORD si accinsero alla risoluzione del problema generale: quanti e quali giudizi si possono enunciare con n concetti? considerando intanto i casi n 3, 4.

La dottrina del sillogismo e dell'inversione dei giudizi venne ampliata analogamente, proponendosi la eliminazione di un qualsivoglia numero di termini medi e la risoluzione per un qualunque termine di un sistema di relazioni logiche simultanee.

Nè vale l'obbiezione che, per tal modo, la logica venga subordinata alla matematica e che essa diventi un'applicazione di quest'ultima scienza e come tale non arrechi reale progresso - come non lo arrecarono le invasioni di altre discipline ausiliarie della logica, cioè della psicologia, della metafisica, della scienza del linguaggio. Perchè, come giustamente osserva il Professor Peano (*Rivista di matematica*, fasc. aprile-maggio, 1891, p. 67) « la matematica non è che una logica perfezionata. » Il simbolismo e la rappresentazione diretta delle relazioni logiche esiste *prima* della matematica: è una teoria più vasta e generale, regolatrice di tutti i nostri pensieri, dalla quale la matematica deriva, come parte speciale, coll'assumere in aggiunta alcuni altri assiomi, che ad alcuni concetti particolari, cioè a quelli di quantità concrete o discrete, si riferiscono.

Del resto, per affermare la potente efficacia del calcolo logico, basterà ricordare solo alcuni dei numerosi e brillanti risultati pratici, che s'ottennero.

Già il BOOLE ¹⁾, oltre molti quesiti da lui proposti

1) *An investigation of the laws of thought....* London, Walton & Maberly, Cambridge, Macmillan & c. 1854 - p. 185-219.

e risolti, espose e criticò in questo linguaggio simbolico le dottrine del Clarke intorno all'esistenza e agli attributi di Dio, e parte dell'*Etica* dello Spinoza. Si può leggere nel recente libro dello SCHRÖDER ¹⁾ una serie di problemi, estratti da varie opere di logica matematica; ma un'applicazione certamente importante è quella fatta dal Prof. PEANO, nella esposizione rigorosamente scientifica dei principi dell'Aritmetica e della Geometria ²⁾. Progressi incontrastabili furono fatti nel campo della teoria logica delle probabilità; e per mostrare la utilità didattica del calcolo logico citerò l'esperimento testè fatto dal Prof. VENN ³⁾, che propose un medesimo quesito di logica a due classi parallele d'alunni, una istruita nella logica tradizionale, l'altra nella logica matematica. Fu un vittoria incontrastabile: i risultati di quest'ultima furono incomparabilmente superiori a quelli della prima. Infine si vedrà nella presente esposizione, come innumerevoli controversie, che per lungo tempo vennero agitate (p. es. circa il significato della *negazione*, o quello della *particolarità* d'un giudizio, ecc.) furono definitivamente decise o tolte di mezzo.

Laonde, sembrami, sarà pienamente giustificato questo tentativo di reuder popolare tale genere di studi; tanto più che il sentimento della necessità di diffon-

1) *Vorlesungen über Algebra der Logik*, I vol. Leipzig, Teubner, 1890 pag. 521-558.

2) *Aritmeticae principia nova methodo exposita*. Torino, Bocca, 1889.

I principi di geometria logicamente esposti. Torino, Bocca, 1889.

Les propositions du quinzième livre d'Euclide, réduites en formules (Mathesis t. X).

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires (Math. Ann. t. XXXVII).

3) SCHRÖDER *op. cit.* p. 528.

derlo tra i cultori della filosofia è condiviso da tutti gli scrittori suaccennati. Così l'illustre Prof. SCHRÖDER mi scriveva (in data 31/5 1890): « da es noch gilt der neuen Disziplin die Anerkennung der Mathematiker sowol als der Philosophen erst zu erobern, so freye ich mich ganz besonders in Ihnen einen unvermutheten thätigen Mitarbeiter gefunden zu haben.... », e il Professor PEANO (2/8, 1888) ».... certo queste dottrine si renderanno famigliari in Italia e fuori se un certo numero di persone studiose e volonterose vi si dedicherà, farà delle pubblicazioni, le eriticherà... Tocca a noi abbreviare questo tempo, richiamandovi l'attenzione degli studiosi. »

Per quanto riguarda i capitoli speciali della presente opera devo però osservare che eccetto la dottrina del concetto, svolta dallo SCHRÖDER nel libro citato, la dottrina del giudizio e quella del sillogismo, ma più ancora delle forme sistematiche, non erano ancor state trattate nella loro interezza; di modo che tranne alcuni accenni ai lavori del MC COLL ¹⁾ e del PEIRCE ²⁾, i capitoli suddetti sono presso che nuovi e contengono i risultati di investigazioni mie particolari.

Ho dato una breve notizia sulla dottrina del numero e dei tipi dei Giudizi fra più quantità, la cui importanza ritengo sia fondamentale per la logica nuova. Pubblicherò fra breve, in altro luogo, i risultati di ulteriori ricerche intorno al medesimo soggetto. Nella dottrina delle leggi del pensiero mi attenni, nel disegno

.....
 1) *The calculus of equivalent statements*. (Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol. IX-XI).

2) *On the algebra of logic*. (Amer. Journ. of. Math. Vol. VII).

generale, all'importante pubblicazione del sig. VOIGT ¹⁾. Per la parte storica sfruttai largamente il PRANTL ²⁾, e per tutta l'opera, naturalmente, consultai gli insigni lavori del WUNDT, del BAIN, del MILL, del SIGWART, del LINDNER.... ecc., i quali lavori cito espressamente tutte le volte che ne fo uso.

In questa esposizione della logica moderna restano invariate tutte quelle parti della logica tradizionale le quali sono compatibili colla medesima; di modo che il libro - come quello del BAIN ove già sono introdotte alcune innovazioni, ma non quelle posteriori al BOOLE può servire di testo per le scuole secondarie, essendo svolte compintamente e succintamente le dottrine indicate dal Programma Ministeriale ora vigente. Salvochè potranno essere omesse le osservazioni scritte in carattere più piccolo, e le note, che sono destinate per chi volesse addentrarsi nella materia, e che potranno servire agli alunni universitari ed agli insegnanti. Con riguardo a tale scopo didattico aggiunti in fine d'ogni capitolo un certo numero di esercizi e di problemi, che potranno essere assegnati come lavori di casa o venir svolti oralmente in iscuola.

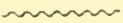
Per non rendere il testo troppo voluminoso ho raccolto in altro libro, intitolato « Introduzione allo studio della logica moderna » tutto ciò che può servire a sostenere le dottrine esposte ed è critica delle teorie antecedenti, limitandomi nell'opera presente - salvo rare eccezioni - alla parte puramente espositiva e dichiarativa.

1) *Die Auflösung von Urtheilssystemen, das Eliminationsproblem und die Kriterien des Widerspruches in der Algebra der Logik.* Leipzig, Danz, 1890.

2) *Geschichte der Logik im Abendlande.* Leipzig, Hirzel 1855, 1870.

Prima di terminare mi sia permesso di ringraziare pubblicamente, l'egregio giovine, sig. GIUSEPPE PAL-LICCIA, studente di questo liceo, il quale con affettuosa premura e gentilezza mi volle costantemente assistere ed aiutare in tutto il faticoso lavoro occorrente alla compilazione ed alla pubblicazione di questo libro. .

Velletri, giugno 1891.





INTRODUZIONE

§ 1. Definizione — § 2. Cómpto e direzioni

§ 3. Divisione e metodi di studio
della logica

§ 1. Non è cosa facile definire una scienza prima d'averla trattata; e perciò osserva giustamente il MILL che le definizioni le quali sogliono porsi in principio di un'opera, non possono dare che un'idea approssimativa dell'oggetto di cui si deve trattare. Ad ogni modo la logica (da *λογος*, parola, come simbolo del pensiero) si occupa del pensiero; ma con ciò non è ancor definito, perchè anche altre scienze s'occupano del pensiero. La psicologia lo considera in rapporto al soggetto pensante: cioè in quanto esso è un'attività psichica o un prodotto, una esplicazione di questa attività. La metafisica ne indaga il valore ontologico e lo considera come parte del reale. La linguistica studia il pensiero umano in quanto esso viene rappresentato simbolicamente con segni grafici o fonici (parole) ¹⁾.

La logica però non considera il pensare come prodotto dell'essere pensante, nè come parte della realtà obbiettiva e neppure come significato di parole, sibbene

1) Storicamente la logica fu metafisica, linguistica indi psicologica (ARISTOTELE.... MILL, BAIN, WUNDT) e sobbeno, come vedremo appresso, abbisogri di queste scienze pei suoi fondamenti e dal confronto con esso ne scaturiscano luminosi risultati, pure va trattata come scienza a parte (KANT).

lo riguarda in sè, nel suo processo ordinato, nelle sue leggi. Nel pensiero così considerato giova distinguere due aspetti principali, cioè il contenuto (termine, materia) e la forma. Il contenuto è ciò che viene pensato, la forma è come lo si pensa. La logica s'occupa del pensiero come dell'essere ¹⁾; esatto nella forma, vero nel contenuto.

§ 2. Questi due scopi: verità materiale ed esattezza formale non sempre furono nettamente proposti e perseguiti. Nei diversi tempi e dai vari cultori della logica fu rivolta l'attenzione preferentemente - talvolta esclusivamente - all'uno o all'altro; donde derivarono vedute e tendenze particolari di questa scienza, che diedero origine alle denominazioni di logica materiale (o metafisica) e di logica formale. Secondo la prima la logica è la scienza del pensiero, espressione della realtà e fonte di sapere ²⁾; secondo l'altra, essa è la scienza delle leggi formali del pensiero ³⁾.

Però siccome nel pensiero forma e contenuto sono indissolubilmente congiunti, pur distinguendoli non si possono considerare come separati. Una logica completa li deve considerar tutt'e

1) Sulla relazione del pensiero logico (*quale dell'essere*) col pensiero psicologico (*qual'è*) cfr. WUNDT, *Logik*, Stuttgart, Enke, 1880, I vol. pag. 10-86, ed il bellissimo recente articolo del DÖRING *was ist Denken?* del II fasc. del « Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie » 1890. — Sembrami invece che debba rigettarsi la distinzione che talvolta vien fatta tra *pensiero in formazione* (oggetto della psicologia) o *pensiero formato* (oggetto della logica) e che si trova in vari trattati usati nelle scuole (crede, se non in isbaglio, nel FIORENTINO), perchè tutti e due restano nella psicologia.

2) Se il pensiero ha da apportare scienza è necessario premettere una certa concordanza tra il pensare e l'essere. Il WUNDT (op. cit. pag. 3-1) distingue pertanto tre gradi nella scuola materiale o metafisica:

I. Tra l'essere ed il pensiero v'ha soltanto un parallelismo (ARISTOTELE, SCHLEIERMACHER, TRENDLENBURG, UENNERWEG).

II. Una parte sola del pensiero (*l'intelligere non l'immaginare*) produce da sè il sapere (Razionalismo di SPINOZA e LEIBNIZ).

III. Havvi identità tra essere o pensare (PLATONE, HEGEL).

Cfr. FERRI. *Della idea del vero e sua relazione coll'idea dell'essere*. (Mem. R. Acc. dei Lincei, 1887).

3) KANT, HERBART, DROBISCH, HAMILTON....

due: essa studia le forme del pensiero in quanto contengono reali contenuti. Forme senza contenuto non si dà; sibbene forma con un contenuto più o meno determinato.

§ 3. La parte della logica che considera la forma e non s'occupa del contenuto, che lascia indeterminato si dice *dottrina delle forme elementari*, e si chiama *dottrina delle forme sistematiche* o *metodologia*, quella che oltre la forma tien conto anche del contenuto (sempre indeterminato). Queste due parti formano la *logica pura*, *teoretica* o *formale* (in un senso più stretto), in quanto che studia le forme del pensiero e ne lascia indeterminato il contenuto, che può essere qualsivoglia, e perciò, come l'algebra, che rappresenta con simboli quantità qualunque, ha un carattere universale e normativo ¹⁾.

La *logica applicata* (o *mista*), all'incontro, oltre che la forma, riguarda la verità materiale di determinati contenuti; e quindi ha un carattere pratico e speciale per le singole scienze, a cui s'applica. Essa forma un tutto con queste, come le applicazioni della matematica sono incorporate alla meccanica, alla fisica, all'astronomia. E pertanto considerandosi come scienza a parte non sarà trattata in questo compendio ²⁾.

1) Rifarendosi a questo carattere universale può dire il MILL (*System of logic*, § 7. Introd.) la logica è un terreno neutrale nel quale possono incontrarsi ed operare concordamento i seguaci di HARTLEY o di REID, di LOCKE o di KANT.

Il carattere normativo per la pratica fa sì che venga ritenuta come scienza e come arte: « La logica è l'arte o la scienza del ragionamento » (WHATELY), « la logica è la dottrina dell'arte del pensiero - *Kunstlehre des Denkens* - » SIGWART. Ed anche il FACCIOLATI (*Jacobi Facciolati logicae*, tom. 1 Protheoria 1 § 7): « *Disci potest scientia, quia est cognitio certa et evidens earum rerum, quae ad disputandum per causas et rationes minime dubias comparata. Sed quia tendit non modo ad cognoscenda disputandi instrumenta, sed etiam ad efficienda, idcirco ars dici potest, et quidem ars scientiis obnoxia quia illis inseruit.* »

2) Però molti autori (tra i quali MILL, BAIN, WUNDT...) aggiungono alla logica un'esposizione di queste applicazioni pratiche, sotto il nome di *metodo-*

Sorge spontanea la domanda, quale dei due, la forma o il contenuto, va studiato pel primo? Per rispondere bisogna osservare che la forma del pensiero viene data dalla ragione, dall'attività intellettuale, mentre il contenuto viene dato dall'esperienza, dall'attività sensitiva ¹⁾. Quindi chi considera prima la forma e poi il contenuto, discende dall'intelligibile, dal pensare universale per concetti al sensibile, al pensare particolare per rappresentazioni: tale metodo è il *deduttivo* e la logica che lo segue si chiama logica *deduttiva*. All'opposto, chi considera prima il contenuto e poi la forma, ascende dal sensibile e dal pensare particolare per rappresentazioni all'intelligibile, al pensare universale per concetti; e questo metodo si dice *induttivo* e la logica che lo segue si dice logica *induttiva* ²⁾. Però è facile riconoscere che i due aspetti o momenti principali del pensiero (forma e contenuto) sono elementi irriducibili.

logia delle singole scienze. Ma non bisogna confondere questa metodologia speciale - parte della logica applicata - con la metodologia propriamente detta, o metodologia generale, la quale, considerando le forme sistematiche, valevoli universalmente per tutte le scienze, appartiene alla logica pura. Cfr. il mio articolo sulla logica e i suoi progressi. Riv. it. di filosofia, fasc. nov.-dic. 1891.

1) KANT. *Kritik der reinen Vernunft*.

2) La logica *induttiva* o *sperimentale* (ἐμπειρική in Aristotele), forse, contrapponendosi alla solita deduttiva (secolastica), di fatto di già col rinascimento italiano (GALILEO). BACONE DI VERULAMIO non può ritenersi come il fondatore teorico della medesima: bensì appena i moderni (MILL, APEL ecc.) che ne diedero i canoni. — La distinzione della logica, secondo la sua tendenza, in formale, materiale, induttiva, deduttiva, non viene sempre nettamente fatta. Ma *induttiva* con *materiale* (*sperimentale*) e, più di spesso, *formale* con *deduttiva*, come quelle che considerano anzitutto il contenuto, o, nel secondo caso, la forma, facilmente vengono tra loro scambiate. — Così è difficile dire un autore seguo recisamente questa o quella scuola: e non essendovi rappresentanti puri delle medesime, queste denominazioni più che caratteri differenziali di un dato logico, valgono come tendenze o tipi generali, che si possono riscontrare, e ai quali i singoli logici si vanno più o meno accostando.

bili, cioè l'uno dall'altro non si può derivare. Laonde quando prenderemo in considerazione entrambi (nella *Dottrina delle forme sistematiche*), non avendo motivi di preferenza, dovremo studiare tanto la forma in rapporto al contenuto, quanto il contenuto in rapporto alla forma: cioè usare tutti e due i metodi, si induttivo che deduttivo.



PARTE I

Delle forme elementari

CAP. I

Teoria generale

§ 4. Definizione e classificazione delle forme elementari

§ 5. Metodo di trattarle: Forme primitive
e forme derivate.

§ 4. Si è detto che nella dottrina delle forme elementari si considerano quelle forme del pensare logico che si prestano ad un contenuto qualunque: esse vengono adoperate in ogni atto logico, tanto nel pensare ordinato (logico) della vita usuale, quanto nelle trattazioni scientifiche (dottrina delle forme sistematiche o metodologia). Quali sono queste forme elementari?

Il concetto, il giudizio ed il sillogismo; ai quali corrispondono gli elementi linguistici: la parola, la proposizione, il ragionamento ¹⁾. In quest'ultimo, che co-

1) Per ora non si può dare una definizione rigorosa delle singole forme elementari (cfr. principio del § 1): e riservandoci di trattarne ai capitoli II, III e IV, bisogna accontentarsi della enumerazione e della nozione approssimativa che vien data nel testo o che si appoggia al linguaggio. Analogamente si potrebbe notare che psicologicamente alle suddette tre forme corrispondono: la rappresentazione, l'associazione semplice tra le rappresentazioni, e la composta (successione di associazioni: per il *post hoc*); metafisicamente: le sostanze (oggetti), le relazioni semplici (fatti: inerenza di proprietà alle cose; connessione di effetti a cause), le relazioni di relazioni (leggi: proprietà di proprietà di cose; effetti di effetti di cause).

stituisce per sé il tipo completo del pensiero logico, compariscono tutti gli elementi suddetti. Così dicendo:

« Tutti i pianeti hanno un moto rotatorio. »

« *Marte* è un pianeta; dunque *Marte* ha un moto rotatorio; »

· formiamo un *sillogismo*. Le tre proposizioni:

« Tutti i pianeti hanno un moto rotatorio, »

« *Marte* è un pianeta, »

« *Marte* ha un moto rotatorio, »

esprimono altrettanti *giudizi*; nei quali si rinvencono i *concetti*, significati dalle parole « pianeta » « *Marte* » « cosa che ha moto rotatorio. »

§ 5. Queste forme non sono indipendenti una dall'altra: sibbene prendendo una come primitiva, le altre ci appaiono derivate da essa.

Dicendo che si possono derivare l'una dall'altra, non si dice che si derivino in modo eguale. La relazione che passa tra concetto e giudizio non è quella che corre tra giudizio e sillogismo. (cfr. § 17, osservazione). La natura del giudizio è determinata dallo studio delle *relazioni* fra i concetti, aggiungendo alcune verità assiomatiche (i così detti principi di identità, di contraddizione e del terzo escluso); mentre quella del sillogismo scaturisce dallo studio delle *operazioni* coi giudizi, a cui s'aggiunge il principio della ragion sufficiente. (Su questi principi vedi il capitolo V, di questa I parte). Denotando, come faremo in seguito, i concetti con simboli o espressioni letterali *a, b, ...* il giudizio verrà rappresentato dai segni della comparazione ($=$, $>$, $<$) fra queste espressioni, che danno origine alle equazioni o alle disuguaglianze logiche; mentre il sillogismo involverà il problema - analogo all'algebrico - della eliminazione dei simboli sovraccennati in un sistema di tali equazioni o disuguaglianze, o della risoluzione delle medesime.

Qual'è adunque la forma che deve prendersi come base per la costruzione della logica?

Considerando che una forma è in certo modo collegata con le rimanenti, parrebbe indifferente dare la preferenza all'una o all'altra. Difatti nella storia della filosofia apparvero - e sonvi tuttora - sistemi di logica che cominciano dal concetto (PLATONE.. e la maggior parte dei trattati che s'usano nelle scuole), altre

che si fondano sul giudizio (ARISTOTELE, KANT), altre sul raziocinio (p. es. il GALLUPPI, poi JEVONS, PEIRCE ed altri della moderna scuola inglese).

Però, tenuto anche conto di quanto si disse nell'osservazione precedente, sembra che al sillogismo, benchè sia il tipo essenziale del pensiero logico, ragionato, non si debba attribuire il carattere della primitività con sicurezza di non andare errati. Tanto che il STEWART (*Logik*, Freiburg i. B. Mohr., 1889, I vol.) non lo ritiene nemmeno come elemento. All'incontro per la scelta a fondamento del sistema logico, sonvi motivi egualmente potenti a favore tanto del giudizio che del concetto.

Noi prenderemo come elemento primitivo il concetto, ed avremo dalla nostra parte, se non altro, la semplicità di questo: a cui fa riscontro la primitività e semplicità della sensazione e della rappresentazione (e del vocabolo) confrontate con gli altri prodotti psicologici (e grammaticali). Il giudizio si dedurrà dalle relazioni ed il sillogismo dalle operazioni coi giudizi.¹⁾

Ci serviremo di simboli letterali per rappresentare le forme elementari: e precisamente di minuscole (o maiuscole) corsive per i concetti, e di minuscole greche per i giudizi. I segni per le relazioni e le operazioni con tali simboli si introdurranno rispettivamente ai §§ 7, 8.

Per la storia di questo simbolismo, che costituisce l'essenza del calcolo logico si può consultare: VENN, *Symbolic Logic*, London, Macmillan, 1881, nelle « Historic notes » al capitolo XX. — LIARD, *Les logiciens anglais contemporains*, 2^a. ed. Paris, Germer Baillière, 1883: ed. in italiano, i miei: *Fondamenti del calcolo logico*, (estratto dal « Giornale di mat. » vol. XXVIII) Napoli, Pellerano, 1890 — pag. 1-2, 26-30, e l'articolo *sulla logica e i suoi progressi* citato.

1) All'incontro nelle logiche che pongon a base il giudizio; il concetto viene definito come il risultato di un giudizio compiuto (nozione avuta); e il sillogismo, come sopra, è dedotto dalle operazioni coi giudizi. Partendo dal sillogismo, il giudizio è il risultato di un sillogismo compiuto (fatto concluso) e — analogamente — il concetto quello di un giudizio compiuto.

Dottrina del concetto

- § 6. Definizione — § 7. Distinzione del concetto
 § 8. Relazioni ed operazioni coi concetti — § 9. Rappresentazione
 grafica — § 10. Categorie ed elementi
 Esercizi e problemi

§ 6. Il « concetto ¹⁾ » riguardandosi come punto di partenza, come primo dato dal quale la logica si sviluppa non potrà essere definito logicamente, ma la sua definizione dovrà prendersi da una qualunque delle altre scienze che s'occupano d'esso, trattando del pensiero. Pertanto si darà una definizione psicologica, una definizione metafisica ed una definizione linguistica del concetto; le quali potranno egualmente servirei per chiarirne il significato.

Psicologicamente si dà del concetto una definizione genetica: cioè si spiega com'esso si formi dalle nostre rappresentazioni.

La formazione psicologica dei concetti rientra completamente nella psicologia: ed è quindi trattata colà. Secondo le varie scuole di questa scienza, si danno, naturalmente, diverse spiegazioni. Possiamo ricordarne quattro principali:

Il concetto non è altro che una solita rappresentazione particolare che prendiamo come tipo, come rappresentante di altre affini (BERKLEY, WUNDT).

1) « idea » « nozione » e con riferimento alla espressione grammaticale « nome » « termine » *Lat.* « notio » « conceptus » « terminus » *Grec.* ὁνομα, εἶδος, νόημα, ἐννοία. *Ted.* « Begriff » *Ingl.* « term » « conception » *Franc.* « mot » « concept ».

Il concetto è una rappresentazione incompleta: è una parte della rappresentazione; cioè del gruppo di sensazioni elementari che la costituiscono, ne riproduciam soltanto alcune (SERGI, e alcuni positivisti).

La rappresentazione è un'idea incompleta: nella rappresentazione (mista di *essenza* e *non essenza*) apparisce l'idea (l'*essenza*) più o meno perfettamente (PLATONE).

Il concetto è il risultato di una nostra attività interna, unificatrice, che elabora le varie rappresentazioni, elidendo le diversità e rafforzando le somiglianze speciali (come nelle immagini sovrapposte delle fotografie multiple di GALTON), fondendole in una immagine tipica.

Metafisicamente, il concetto è ciò che corrisponde nella nostra mente ad un oggetto, considerato come reale ontologico. ¹⁾

Linguisticamente, il concetto è il significato di una parola, che può essere soggetto di una proposizione (nome, termine). ²⁾

§ 7. Si usano fare varie distinzioni tra i concetti: alcune considerandoli per sé stessi (assolute), altre considerandoli uno rispetto all'altro (relative). Le prime considerando direttamente i concetti, nella loro propria essenza, dovranno appoggiarsi ad una delle scienze ausiliari della logica, che servirono a definirli: mentre le seconde potranno trattarsi logicamente.

Distinzioni assolute. Riportandoci alla definizione metafisica osserviamo che ad ogni oggetto corrisponde un concetto, ma non viceversa; ad un concetto può non corrispondere verun oggetto (allora la parola che

1) Non possiamo addentrarci in questa definizione: ed esaminare la giusta portata del vocabolo « oggetto, come reale ontologico » e la sua relazione con gli altri reali: sostanza, attributo, accidente ecc. Cfr. l'osservazione al § 10.

2) Analogamente alla nota precedente, non rispondiamo alla domanda se la parola significhi la rappresentazione psichica o l'oggetto ontologico; che le corrisponde. (MILL. *op. cit.* vol. I. lib. 1. Cap. 2. § 1).

lo esprime non ha alcun significato reale, è un puro *flatus vocis*). Quando ad un concetto corrisponde un oggetto (solo), il concetto si chiama *individuale* (singolare): p. es. « Aristotele » « questa speranza », « la più grande città del mondo » Quando ad un concetto corrispondono *più* oggetti, il concetto si dice *generico* (generale, universale) p. es. « pianta, » « virtù, » « città »

Il complesso dei singoli oggetti che possono corrispondere ad un concetto generico, si chiama la *classe* (di cose) pertinente a questo concetto. Così sono classi « tutte le singole piante prese insieme » « le singole virtù » « le singole città » ecc.

Adottando il nome di classe in senso lato, cioè come il correlativo ontologico del concetto, possiamo dire che ad ogni concetto corrisponde una classe: la quale abbraccia più oggetti, se il concetto è generico; si riduce ad un oggetto solo, se il concetto è individuale; e se il concetto è nullo, è una classe vuota, che non consta di verun oggetto.

Il concetto corrispondente a tutti gli oggetti di una classe presi insieme e considerati come un tutto, come un oggetto solo si dice *collettivo*. P. es. « esercito » « assemblea » « gioventù »

I nomi collettivi possono nuovamente distinguere in particolari e universali « essendovi più *nazioni* più *assemblee* questi nomi (collettivi) son anche nomi generali. Al contrario siccome non v'ha che un solo *universo*, questo termine collettivo è sempre individuale ». ¹⁾

1) BAIN, *Logique deductive et inductive*, trad. G. Compayré, Paris, Germer-Baillière, 1875. Vol. I p. 73.

In secondo luogo, l'oggetto o la classe degli oggetti, a cui il concetto si riferisce, può esistere da per sé (come sostanza), o pure soltanto essere in un altro oggetto (come sua proprietà, stato accidente...).

I concetti che si riferiscono a sostanze p. es. « pianta » « Londra » « popolo » ... si chiamano *concreti*, gli altri, p. es. « durezza », « bontà », « colore » ... si dicono *astratti*.

Combinando assieme le due divisioni, distinguonsi quattro specie di concetti:

- 1.^o *concetto individuale concreto* p. es. « Socrate »
- 2.^o *concetto individuale astratto* » » « il peso della Terra ».
- 3.^o *concetto generico concreto* » » « pesce »
- 4.^o *concetto generico astratto* » » « dolore »

Intorno ai concetti generici verte il celebre problema capitale della scolastica: che chiede se ad essi corrisponda un reale ontologico e di qual natura esso sia e come si comporti cogli individui. 1) Varie furono le opinioni, secondo il PRANTL 2)

1) Il problema avvertito di già da ARISTOTELE, è enunciato chiaramente da PORFIRIO (*Isag.* Cap. I): αὐτίκα περὶ γενῶν τε καὶ εἰδῶν, τὸ μὲν εἴτε ὑπεσθῆκεν εἴτε ἐν μόναις οὐλαῖς ἐπινοοῖαις κεῖται, εἴτε ὑπεστεκλότα σῶματα ἔστιν, ἢ ἀσώματα, καὶ χωριστά ἢ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, καὶ περὶ ταῦτα ὑπεσθῶτα, παραιτῆσθαι λέγειν, βαθυτάτης οὐσας τῆς τοιαύτης πραγματείας καὶ ἄλλης μετίζονος θεωμένης ἐξετάσεως.

2) PRANTL, *Geschichte der Logik in Abendlande*, Leipzig, Hezel. vol II p. 118, distingue le opinioni seguenti:

1. di Roscellino, 2. d'Abelardo: « *universalia sunt sermones* », 3. di Iohannes di Salisbury » l'universale è l'*intellectus* o la *notio* ciceroniana. « 4. di Gualtiero di Montaigno: « gli universali sono essenzialmente congiunti cogli individui. Importa conoscere lo *status* nel quale si considera l'individuo ». 5. di Bernardo di Chartres: realismo platonico. 6. Gilberto di Portiers. « *formae naturae* » 7. di Gausleno di Soissons: « l'universalità consiste in un *colligere* ». 8. ipotesi dello « *maneries* ». 9. « Gli universali sono forme astratte come le

non meno di tredici, ma principalmente importanti quelle dei *nominatisti* e quelle dei *realisti*. I primi (ROSCCELLINO) ritenevano i concetti generici come « *voces* », senza esistenza reale all'infuori del pensiero — come astrazioni mentali riferentisi ai singoli oggetti individuali e cavate da questi (« *universalia post rem* »). I secondi (GUGLIELMO DI CHAMPEUX) all'incontro affermavano la realtà sostanziale dei medesimi concetti generici, anteriore a quella degl'individui (« *universalia ante rem* »). Tra questi estremi sta ABELARDO, il quale colla formula « *universalia sunt in rebus* » affermò la coesistenza degli « universali » (corrispondente ontologico del concetto generico) come *essentia*, negli oggetti individuali (*existentia*). Vedi l'importante articolo: *Il problema eapitate della Scolastica* del Prof. F. BERTINARIA (Riv. it. di fil. 1889 luglio-agosto). —

Riferendoci alla definizione linguistica, osserviamo che le due suddette divisioni si riflettono anche nelle forme grammaticali (*nome proprio e nome comune, nome concreto e nome astratto*). Alcuni filosofi inglesi (MILL, JEVONS . . .) ne introducono - o sostengono - delle altre cioè di concetti *connotativi* e *non connotativi*, *univoci ed equivoci (polivoci)*, *assoluti e relativi*. . . . Però queste distinzioni a base linguistica, come quelle in concetti *oscuri* o *chiari*, *ordinati* o *confusi* (LEIBNIZ), a base psicologica, sono per la logica di poca o niuna importanza. Invece di importanza veramente vitale per la logica è la distinzione tra *individuo* e *genere*, e solamente questa: poichè su di essa si basa il fondamentale rapporto della subordinazione (Cfr. SCHRÖDER *op. cit.* p. 78). La relazione fra *astratto* e *generico* apparirà al § 10; quella fra *termini positivo* e *negativo* al § 8.

Distinzioni relative. Mentre il concetto considerato in sè doveva essere definito e distinto con elementi extralogicali, le *relazioni* dei concetti - cioè il concetto considerato in rapporto ad altri concetti - possono essere considerate da un lato puramente logico. Esse sono il primo fatto della logica, dal quale tutta questa deriva.

.....

forme matematiche ». 10. « *ratio indifferentie* » 11. L'opinione di Guglielmo di Champeux. 12. quella (citata nel testo) di Abelardo, e 13. l'opinione dell'autore del libro « *de generibus et speciebus* » pubblicato dal Cousin (come opera inedita d'Abelardo).

Le relazioni fondamentali tra i concetti (anzi, come si vedrà in seguito fra tutte le quantità logiche) sono tre: (1) *La subordinazione* (inclusione), (2) *la interferenza* (incrocciamento, ovvero inclusione ed esclusione parziali), (3) *la disgiunzione* (esclusione totale).

Osserva giustamente il LINDNER ¹⁾ che « la presupposizione più generale della logica è che un pensiero (concetto) sia contenuto in un altro... Se tutti i concetti fossero assolutamente differenti fra di loro, non vi sarebbe logica; il pensare — se pur così si potesse chiamare — consisterebbe nell'unire nella nostra mente questi concetti come i vocaboli d'un dizionario; il parlare stesso sarebbe soltanto l'espressione di singoli nomi senza costruzione. Tutte le operazioni logiche si fondano sulla somiglianza o sul contrasto « — espressioni che sono la nota predominante in alcune logiche moderne ²⁾, e che si riferiscono appunto alla subordinazione od alla disgiunzione — » per cui due concetti sono compresi l'uno dell'altro, oppure si escludono a vicenda.

La subordinazione è quel rapporto che passa fra il concetto individuale di un oggetto e quello generico della classe che lo comprende: p. es. intercede tale rapporto fra il concetto « Socrate » ed il concetto « uomo ». « Socrate è un uomo ». « Socrate », il concetto individuale, si dice subordinato, contenuto dal concetto « uomo » che è il sovraordinato, il contenente. Uno o più concetti individuali, subordinati ad un medesimo concetto generico, formano *parte* di questo concetto, che ne è il *totale*. La parte è subordinata

1) LINDNER. *Logica formale*, trad. Erber. Zara, Woditzka, 1889, p. 4.

2) p. es. BAIN, *op. cit.* vol. I p. 5: la conoscenza avviene mediante l'associazione di differenza e d'accordi (*rassemblance, agreeement*) di più sensazioni ». p. 7. « il potere di generalizzare consiste nel concepire le qualità comuni, gli accordi di più cognizioni particolari: « l'accordo è constatato dal nome comune » p. 11. « la legge intellettuale dell'accordo o della rassomiglianza è il principio del ragionamento ».... ecc.

al tutto. Pertanto lo stesso rapporto di subordinazione può correre fra due concetti generici, quando la classe pertinente ad uno può riguardarsi come parte (in senso collettivo come individuo) della classe pertinente all'altro; p. es. « greco » è subordinato ad « uomo »: « i greci sono uomini » « parte degli uomini sono greci ». Tal'è la subordinazione della specie al genere. Il concetto sovraordinato si dice essere *nota* del subordinato.

In generale si dice che un concetto *a* è subordinato ad un concetto *b* ogniquale volta tutti gli individui (o le parti) della classe di *a* sono individui (o parti) della classe di *b*.

Il rapporto di subordinazione, che chiameremo I relazione, è di somma importanza per la logica, poichè tutte le altre relazioni (introdotta la nozione della negazione cfr. § 8 fine) ad esse si riducono.

L'eccellenza di questo rapporto, tradizionale nella logica, fu combattuta da alcuni recenti filosofi e specialmente dal WUNDT ¹⁾, il quale pretende che vi sieno altre relazioni irriducibili a questa forma. Però queste sedicenti relazioni irriducibili sono piuttosto relazioni indeterminate od implicite, come giustamente osserva il VENN ²⁾. Pur mantenendo una distinzione fra il reale rapporto di *subordinazione*, che corre fra il concetto di un oggetto e quello della sua classe p. es. tra « giglio » e « fiore », e quell'altro rapporto, detto di *subsunzione* ³⁾, il quale intercede fra il concetto (concreto) di un oggetto e quello (astratto) di una sua qualità (proprietà, nota in senso stretto, attributo) p. es. tra

1) WUNDT, *Logik*, Stuttgart, Enke, 1880. I vol. p. 114 e seg. p. 124 e seg.

2) Proc. of the Cambridge philosophical Society. vol. IV, p. 40: « To these however Wundt adds some others which are not so much class relations as dependencies or implications ».

3) LOTZE, *Logik*, Leipzig, Hirzel. p. 48.

SIGWART, *Logik*, Tübingen, Laupp, 1873. I vol. p. 294.

« giglio » e « bianco »; quest'ultimo, — cioè la subsumzione — può convertirsi in una vera subordinazione (p. es. considerando il rapporto tra « giglio » e « cosa bianca »), mediante il cosiddetto *spostamento categoriale*, di cui diremo al § 11.

Quando una parte soltanto di un concetto è subordinata ad un altro, diciamo che i due concetti stanno in interferenza o in II relazione fra di loro (inclusione parziale o esclusione parziale); p. es. « italiano » e « cattolico »: soltanto « parte » degli italiani sono cattolici, « alcuni » cattolici sono italiani.

a e b sono interferenti, quando alcuni individui (o parti dell'uno sono individui (o parti) dell'altro; ma altri no.

Quando nessuna parte di un concetto è subordinata ad un altro, si dice che i concetti sono fra di loro disgiunti, o in III relazione (esclusione totale) p. es. « minerale » e « pianta »: « nessuna » pianta è minerale; non v'ha alcun minerale che sia pianta.

a e b sono disgiunti, quando non v'ha alcun individuo (o parte) dell'uno che sia individuo (o parte) dell'altro.

Queste tre relazioni s'esprimono coi segni seguenti:

la I; $<$ (oppure $>$): $a < b$, « greco » $<$ « uomo » ($b > a$ « uomo » $>$ « greco »).

la II; *int.*: $a \text{ int. } b$, « italiano » *int.* « cattolico »

la III; $) (: a) (b$ « minerale » $) ($ « pianta ».

È da notarsi che il segno della prima relazione, in generale, non è simmetrico. Il rapporto che passa tra

1) I segni della II e III relazione si devono al WUNDT. Quello della I è molto più antico. Per comodità tipografica anziché il segno del Wundt usiamo per la seconda relazione la sillaba *int.* (« interferenza »).

tra a e b in massima è diverso da quello che passa tra b ed a , quindi se a è subordinato a b la relazione

$$a < b$$

— che si può leggere, come nella matematica, *a minore di b*, intendendo per « minore » : « contenuto » « parte », « subordinato » — non è reciprocabile, cioè non posso scambiare b con a e lasciare inalterato il segno $>$, ma per esprimere la relazione che passa tra b ed a , devo scrivere

$$b > a$$

(*b maggiore di a*, cioè « contenente », « subordinante » *a*). Se « tutti i greci sono uomini » non è vero che « tutti gli uomini sono greci ». Alle volte però può darsi che sussistano contemporaneamente le disuguaglianze:

$$\begin{array}{cc} a < b & (b > a) \\ c & b < a \quad (a > b). \end{array}$$

In tal caso si dice che tra a e b ha luogo la relazione di subordinazione reciproca o di identità, che si scrive

$$a = b \quad \text{ovvero} \quad b = a$$

(*a eguale a b*)

p. es. « cloruro di sodio » = « sale da cucina », « la città più grande della terra » = « Londra »

Si vede che la copula « è » esprime ambigualmente subordinazione od identità, e quindi la possiamo esprimere col segno composto

\leq (« minore od eguale »)
 \equiv
 e leggere $a \leq b$ « $a \dot{\leq} b$ ». ¹⁾
 \equiv

I segni della eguaglianza e quelli della II e III relazione sono simmetrici; cioè si possono lasciare immutati e scambiare i segni che denotano i concetti. Così se

$$\begin{array}{lll}
 a = b & \text{sarà} & b = a \\
 a \text{ int. } b & & b \text{ int. } a \\
 a) (b & & b) (a
 \end{array}$$

Visto che, dati due concetti, a e b , la I relazione può avere le due forme $a < b$ oppure $a > b$; e considerando come una nuova relazione il caso dell'eguaglianza, alcuni ²⁾ distinguono cinque relazioni elementari, corrispondenti ai cinque segni, $<$, $>$, $=$, *int.*, $) ($, che sono difatti tutte le relazioni possibili tra a e b . Ma relazioni veramente nuove non sono che le tre suaccennate, essendo

$$\begin{array}{l}
 (a > b) = (b < a) \\
 \text{ed} \quad (a = b) = (a < b) (b < a)
 \end{array}$$

Si vedrà in seguito, che si può fare a meno dei segni *int.* e $) ($: potendosi ogni relazione rappresentare coi simboli $<$ o \equiv .

§ 8. Dato un concetto, a , si potrà trovare un concetto di esso maggiore, b , cioè tale sia

$$a < b,$$

1) SCHRÖDER usa un segno speciale, composto dai due $<$ ed \equiv ; PEIRCE o gli americani \leq , PEANO « $\dot{\leq}$ »; cfr. Rivista di matematica, gennaio 1891 p. 9 nota 5; ed altri ancora DE MORGAN, FREGE ecc.; cfr. quindi VENN *On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic*. Proc. of the Cambridge Philosophical Society 1880 vol. IV p. 35-46.

2) GERSONNE, *Essai de dialectique rationnelle* (negli « Annales de mathématiques » da lui redatti. Tom. VII. p. 189-228,

oppure non lo si potrà trovare. In quest'ultimo caso a si dirà *massimo*. Nel caso che esista un tale b , a non sarà più un massimo, ma lo sarà b qualora non si trovi per avventura un altro concetto c , maggiore di b , e così via.

In generale, in una serie di concetti $a, b, c, \dots n$, l'uno maggiore dell'altro e disposti in modo che sia

$$a < b < c \dots < n,$$

l'ultimo, nel nostro caso n , cioè quello che è maggiore di tutti e, quindi, di nessuno minore, si dirà il concetto massimo tra quelli. P. es. dei concetti « Socrate » « Ateniese », « Greco », « Europeo », « uomo », dei quali ognuno è subordinato al seguente, « uomo » è il massimo.

Analogamente dato un concetto, a , tale che nessun altro concetto, b , siavi, di esso minore, si dirà *minimo*. E in generale in una serie di concetti $a, b, c, \dots m$, l'uno minore dell'altro e disposti in modo che sia:

$$a > b > c \dots > m$$

l'ultimo, m , di tutti minore e quindi di nessuno maggiore si dirà il minimo di tali concetti. Nell'esempio precedente il concetto minimo sarebbe « Socrate ».

La classe maggiore di tutte le classi, quella che contiene tutti gli oggetti che si considerano, si chiama *campo del pensabile* (« *universe of discourse* ») e si segue con 1¹⁾). La classe minore di ogni classe, è quella

1) Questo simbolo fu introdotto dal BOOLE. Alcuni sostituiscono al 1 il segno ∞ , GRASSMANN; T. PEANO: \bullet . Riguardo al suo significato nella logica, vedi SCHRÖDER *op. cit.* p. 211, segg.

esprimente il « *nulla* ». Essa è contenuta in ogni concetto, poichè questo contiene sè stesso e di più « *nulla* ». Essa si segna con o ¹⁾. Quindi per le definizioni, date un qualunque concetto a sarà

$$a \leq 1 \quad , \quad e \quad a \geq o$$

Intorno alle proprietà dell' 1 e dello o logico, confronta gli esercizi , che ne giustificano l'uso; in oltre vedi § 10, osservazione.

Si dice *somma* di due concetti, a e b , il minimo concetto che contiene sia a che b , e lo si denota con $a + b$, che si legge « *a più b* » oppure « *a o b* », ciò che è a ovvero b ²⁾.

Si dice *prodotto* di due concetti, a e b , il massimo concetto contenuto sia da a che da b , e lo si denota con $a \times b$ oppure $a b$, che si legge « *a moltiplicato b* » oppure « *a che è b* » « *ciò che è tanto a che b* » ³⁾.

Date due concetti a e b , si cercano dei concetti c_k ($k = 1, 2, 3 \dots n$) tali che sia il seguente minore del precedente — cioè tali che sussiste sempre l'ineguaglianza.

$$c_k > c_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

1) Questo segno è adottato pressochè da tutti i logici. Cfr. SCHRÖDER, ibid.

2) Sono le altre definizioni della somma logica. $a + b$ significa la classe che comprende tutti gli individui che appartengono alla classe a o alla classe b . Specialmente importante è la definizione analitica data dal PIERCE (op. cit. p. 33). La definizione, accennata dal PIANO (*Calcolo geometrico* p. 2) fu da me, resa rigorosa e data nei fondamenti (p. 9 sott. vedi anche il n. VII).

Il segno $+$ ha molta analogie coll'eguale segno algebrico (vedi esercizi al § 8); ma ha anche proprietà speciali della logica, tanto che alcuni lo sostituiscono con altri segni.

3) Il segno \times valgono le medesimo osservazioni fatte alla nota precedente.

e ciascuno maggiore si di a che di b :

$$c_k > a, \quad c_k > b \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

il minimo c della serie dei concetti c_k sarà, per definizione, eguale alle somme $a + b$.

P. es. posto $a =$ « portoghese » $b =$ « spagnuolo », la serie dei c_k potrà essere:

« uomo » $>$ « europeo » $>$ « abitante della penisola iberica »; quindi « portoghese » $+$ « spagnuolo » $=$ « abitanti della penisola iberica ».

Analogamente per trovare i prodotti di a e b , si cercano dei concetti d_k tali che sieno l'uno maggiore del precedente — cioè

$$d_k < d_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1)$$

e ciascuno minore si di a che di b :

$$d_k < a, \quad d_k < b \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

il massimo d_m della serie dei d_k , sarà per definizione eguale al prodotto $a b$.

Per es. posto $a =$ « quadrilatero » $b =$ « figura che ha i lati opposti paralleli » la serie dei d_k potrà essere

« quadrato » $<$ « parallelogrammo rettangolo » $<$ « parallelogrammo »; quindi « quadrilatero » \times « che ha i lati opposti paralleli » $=$ « parallelogrammo ».

Come si vede la somma ha per sue parti i sommandi, il prodotto è invece la parte comune a tutti i fattori.

La somma o il prodotto di due concetti può sempre ottenersi ed è un nuovo concetto; $a + b$ ed ab si diranno concetti composti (additivamente o moltiplicativamente, da a e da b , che si risguarderanno come relativamente semplici ¹⁾).

Affinchè queste operazioni sieno eseguibili bisogna che esista, in ogni singolo caso, un minimo nella serie dei concetti (c)^k contenenti gli addendi — per la somma —; un massimo nella serie dei concetti (d)^k contenenti i fattori — per il prodotto —.

Più sopra, *massimo* e *minimo* furono definiti, ma non ne fu dimostrata l'esistenza per tutti i casi, (talvolta forse non si potrebbe trovare almeno di questi c o d); oppure la loro serie potrebbe essere infinita). Questa dimostrazione è possibile coll'introduzione dei segni 1 e 0 , che si chiamano pertanto rispettivamente *moduli* della somma e del prodotto; ed è data altrove. ²⁾ Poichè nel caso più sfavorevole per la somma v'è sempre il concetto (c_1) di tutto il pensabile (« *universe of discourse* », 1) che comprende certamente tutti gli addendi; nel caso più sfavorevole pel prodotto, cioè quando i fattori non hanno alcuna parte comune (III relazione) si dice che esso è eguale a zero (0), ossia che non esiste.

Analogamente si definisce e si trova la somma o il prodotto di più concetti (cfr. § 10).

1) Abbiamo detto relativamente semplici, perchè anche a e b possono suporsi sempre come composti di parti (nella loro sfera) o di note (nel loro contenuto). Concetti assolutamente semplici cioè tali che non constino nè di parti nè di note non si danno. I concetti che non si possono più dividere in parti, i *minimi*, sono i concetti individuali — ma essi hanno un massimo contenuto. I concetti che non possono più dividersi in note sono le categorie — ma esse hanno una massima sfera. Cfr. § 10.

2) *Fondamenti* p. 10 seg.

La somma di tutte le parti di un concetto forma la sua *sfera* ¹⁾ il prodotto di tutti i concetti di cui esso è parte, il *contenuto* ²⁾. In altri termini la sfera è la somma dei concetti minori, subordinati, degl'individui; il contenuto è il prodotto dei concetti maggiori, sovraordinati, delle note. Così la sfera di « uomo » è costituita da tutti i singoli uomini: ed è uguale, supponiamo, a « europeo » + « asiatico » + « americano » + « africano » + « australiano »: il contenuto è « ente ragionevole » « finito ».... ecc.

Sfera e contenuto stanno in iscambievole rapporto fra di loro, talchè le tre relazioni, menzionate al § precedente, corrispondono a determinati rapporti vuoi tra le sfere, vuoi tra i contenuti dei due concetti.

P. es. Se due concetti, *a* e *b*, stanno nella I relazione, così che sia

$$a < b$$

allora *a* sarà contenuto (come parte) nella sfera di *b*: e *b* sarà compreso (come nota) nel contenuto di *a*: « greco » è contenuto nella sfera di « uomo »; « uomo » è compreso nel contenuto di « greco ».

Appare che le relazioni tra due concetti si invertano, qualora si scambino i contenuti con le sfere. Ma non bisogna credere pertanto che contenuto e sfera sieno in semplice ragione inversa; se pure il contenuto cresca col diminuire della sfera e viceversa.

1) *Estensione*, Lat. *ambitus*, Grec. *περίοχος*. Ted. *Umfang*. Ingl. *denotation*, *extent*, *quantity* (HAMILTON), *scope* (DE MORGAN), *aggregat*, Franc. *extension*, *étendue* ecc.

2) *Intensione*, *compreensione*. Lat. *complexus*, *summa*. Grec. *συμπλοχή*. Ted. *Inhalt*. Ingl. *connotation*, *intent*, *quality* (HAMILTON), *force* (DE MORGAN) *compound*. Franc. *compréhension* ecc.

Il DROBISCH ¹⁾ crede che la grandezza della sfera diminuisca in ragione geometrica col crescere in progressione aritmetica della grandezza del contenuto. Però la loro vera connessione appare dai sistemi seguenti di relazioni, che le definiscono:

$$\begin{array}{cc} a < b \\ k & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a < b \\ k & 2 \end{array}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{array}{cc} a < b \\ k & n \end{array}$$

$$\text{Contenuto di } a = \prod_{k=1}^n b_i$$

$$\begin{array}{cc} a < b \\ 1 & i \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a < b \\ 2 & i \end{array}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{array}{cc} a < b \\ m & i \end{array}$$

$$\text{Sfera di } b = \sum_{k=1}^m a_i$$

e manifestamente sfera e contenuto stanno fra di loro come i segni logici Σ e Π , che possono considerarsi come simboli di operazioni fra loro inverse ²⁾.

Chiamasi *negazione (opposto contraddittorio)* di un concetto a , la somma di tutti i concetti che stanno nella III relazione con a ; e si denota coll'aggiungere una lineetta ad a : a_1 , \bar{a} , a^1 , $-a$, che si legge *non a*.

Quindi per definizione è

$$a + a = 1$$

$$a a = 0$$

1) DROBISCH, *Neue Darstellung der Logik*, Leipzig, Voss, 3. ed. p. 200.

2) *Fondamenti*, p. 35. — Su questo argomento si tratta anche alla Parte II Cap. II.

3) Cfr. SCHÜDGEN op. cit. p. 303.

Si dimostra che per ogni a havvi un tale a ed uno solo ²⁾. Inoltre è

$$\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = a.$$

Queste coppie di valori, a ed a , formano ciò che si dice il termine positivo ed il suo corrispondente negativo. Il negativo si forma di solito premettendo al termine positivo una delle particelle *in*, *a* (*an*), *s*, *ne*, *dis*,... p. es. « indicibile », « anormale », « sfavorevole », « nefasto » disarmonia ». Il negativo del negativo è il positivo. — « Se la lingua italiana fosse perfetta, ogni termine avrebbe un controtermine negativo che farebbe perfetto riscontro al positivo; in questo modo gli aggettivi e i nomi sarebbero sempre a coppie ». ¹⁾ Se il termine è semplice (cioè consta di una sola parola) questo si può ottenere, adottando come sua negazione, il vocabolo formato col premettere la sillaba « non » al medesimo: p. es. « turchino », « *non-turchino*. » Però quando con un simbolo logico, p. es. a si intende un termine composto p. es. $bc + d$ [« italiani-cattolici » o « ecclesiastici »] la sua negazione, che logicamente si può dire semplicemente a_1 , dovrà nel linguaggio essere espressa con una parafrasi, traducendo in parole il polinomio $(b_1 + c_1) d_1$ [« i laici (d_1) che non sono né italiani né cattolici »], che è appunto la negazione di $bc + d$ (Cfr. Esercizi al § 10).

Bisogna evitare accuratamente di ritenere per negazione di un concetto un suo semplice *contrario*, cioè un concetto disgiunto anziché la somma di tutti i concetti disgiunti: p. es. « grande » come negativo di « piccolo » (mentre il vero opposto contraddittorio è « non piccolo » che contiene anche il « mezzano »). D'altra parte non bisogna estendere la somma dei disgiunti oltre il campo del pensabile dato: e così « non uomo » non significa « triangolo » « passione » « acido solforico »... (LORZE), ma « ogni altro animale fuorché l'uomo » — ritenendo per « universe of discourse » il concetto animale ».

Adunque, come giustamente osserva il DE MORGAN, nella negazione bisogna por mente a tre cose distinte: al *totale* (campo del pensabile), che diviso in due parti, da i due membri

1) *Fondamenti*, p. 11.

2) JEVONS - *Logica* trad. Di Giorgio, Hoepli, Milano, 1878 (2. ed.) p. 17.

positivo e negativo. Fissati due di questi elementi, il terzo è pure dato ($a = 1 - a_1$; $1 = a + a_1$ etc. ¹⁾).

Introdotta la negazione, possiamo esprimere tutte le relazioni col segno della subordinazione: giacchè la III relazione, $a \cap b$ può ridursi alla I: $a < b_1$ — oppure $b < a_1$, da $b \cap a$ — « ciò che non è b , è compreso in non b ; e la II relazione $a \text{ int. } b$ può ridursi nelle due

$a < b$, $a < b$, — dove a ed a sono parti di a .
 $m \quad n \quad m \quad n$

§ 9. Per rappresentare graficamente i concetti e le loro relazioni si adoperano alcune figure geometriche, dette *simboli euleriani* ²⁾, cioè i concetti, considerati, in riguardo alla loro estensione (sfera), si designano con circoli (projezioni nelle loro sfere nel piano). La subordinazione (I relazione) appare come la inclusione (del minore nel maggiore), la interferenza (II relazione) come la intersezione, la disgiunzione (III relazione) come la esclusione reciproca di questi circoli (vedi figg. 1, 2, 3).

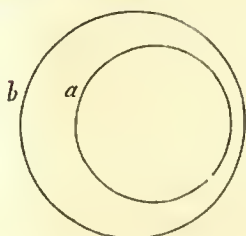


fig. 1

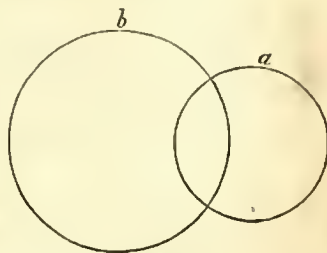


fig. 2

1) Intorno alla sottrazione logica vedi: *Fondamenti* p. 9 e segg.

2) Vedi le mie note *Sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche* (Rend. della R. Accademia dei Lincei. vol. VI p. 50-55, 373-378). — In oltre:

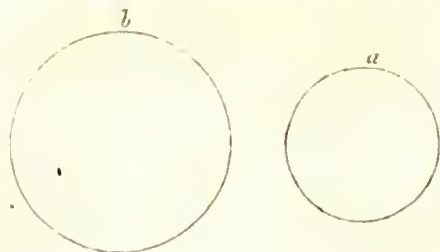


fig. 3

Il campo del pensabile è rappresentato da tutto il piano (*lavagna*) dove può essere segnato un concetto. La somma di due concetti è rappresentata dalla superficie occupata dai due cerchi corrispondenti: il prodotto della porzione del piano comune ai due cerchi. La negazione di un concetto è rappresentata da tutta la superficie esterna alla figura euleriana che lo significa: è quello che resta del piano, tolta tale figura.

Si vede nella prima relazione (fig. 1) che il prodotto ab (la parte comune ad a e b) s'identifica con a , mentre la somma è uguale a b .

Nella seconda relazione (fig. 2), il prodotto è rappresentato dalla superficie comune ai due cerchi; la somma dalla superficie contenuta dalle due circonferenze.

Nella terza relazione (fig. 3) il prodotto è zero, la somma è rappresentata dalle due superficie circolari.

§ 10. Le relazioni e le operazioni definite per due concetti, possono naturalmente estendersi ad un numero qualsiasi di concetti. Avremo così gruppi di re-

lazioni coesistenti, prodotti di più fattori, somma di più addendi:

Ad esempio tre concetti possono trovarsi simultaneamente in queste relazioni:

$$\begin{array}{llll}
 a < b \text{ (I)} & a < b \text{ (I)} & a < \text{ (I)} & a \text{ int. } b \text{ (II)*} \\
 b < c \text{ (I)} & b) (c \text{ (II)} & b \text{ int. (II)} & b \text{ int. } c \text{ (II)} \\
 a < c \text{ (I)} & a < c \text{ (I)} & a \text{ int. (II)} & a) (c \text{ (III) ecc.}
 \end{array}$$

Le relazioni fra più concetti si studieranno al § 16, trattandosi della teoria del giudizio.

La somma $a + b + c$ è la minima classe contenente a, b, c ; il prodotto abc la massima classe contenuta in a, b, c .

$a(b + c)$ è evidentemente, la massima classe contenuta in a, c e in $b + c$; e così via. (Vedi *esercizi*).

In generale date diversi concetti a, b, c, \dots , si possono eseguire quante operazioni logiche si vuole tra di essi: e quindi si ottiene un polinomio, che può sempre interpretarsi logicamente e che è un nuovo concetto. Questo polinomio si dice *funzione* delle quantità a, b, c, \dots , intendendo con questo vocabolo, come nelle matematiche, una qualunque espressione che contiene le quantità a, b, c, \dots , congiunte additivamente o moltiplicativamente fra loro o con le rispettive negazioni.

Così dati n concetti possiamo formare il concetto composto che ha essi n concetti quali note, per suo contenuto. È questo concetto il prodotto degli n concetti. Analogamente possiamo formare il concetto composto che ha essi n concetti quali parti della sua sfera. È questo concetto la somma degli n concetti.

In forza della legge di dualità (§ 25, fine) per la quale ad ogni proposizione circa la somma corrisponde un'altra circa il prodotto (cfr. la correlazione tra sfera e contenuto), che si può dalla prima immediatamente derivare, e vice versa; basta studiare ora i prodotti di più fattori e non occorre rilevare espressamente le somme di più addendi, che ai suddetti prodotti dualmente corrispondono.

Dei concetti $a, ab, abc \dots$ che si ottengono con la successiva moltiplicazione degli n concetti fra di loro, è ciascuno maggiore — o al più eguale — del susseguente (cfr. esercizi al § 8). L'ultimo concetto

$$x = abcdef \dots$$

a cui si perviene, si dice determinato (o definito, vedi §§ 28, 29) dai concetti $a, b, c \dots$ che sono note del suo contenuto. Il processo col quale ad esso si arriva — cioè la moltiplicazione di a per b , per c ecc. — dicesi determinazione, p. es. « nave » « nave a vapore » « nave a vapore da guerra » « Il Re d'Italia ».

La disposizione delle note nel contenuto e quindi l'ordine dei fattori nella determinazione è logicamente indifferente pel concetto definito, poichè

$$abc = acb = bac \text{ etc. (vedi esercizi al § 8),}$$

« uomo europeo alto di statura vecchio » è lo stesso che « vecchio europeo, uomo alto di statura » ecc. Però di fatto noi mettiamo dinanzi alle altre le note così dette essenziali, cioè quelle che si riferiscono alla sostanza, alle qualità principali dell'oggetto a cui il concetto corrisponde: prima i nomi, poi gli aggettivi ed altri complementi: così diciamo « una rosa rossa colta nel giardino » e non « un oggetto colto nel giardino, di

colore rosso, che è una rosa ». Ma logicamente le due dizioni esprimono la stessa cosa, quindi sono concetti identici; la loro diversità è d'indole puramente psicologica, fissandosi più specialmente la nostra attenzione e, quindi, dandosi maggiore rilievo alla rappresentazione che compare per la prima.

Le note non essenziali, che si riferiscono a qualità accidentali, a modi della sostanza, si chiamano secondarie.

Ma la distinzione di note essenziali e secondarie, come quelle di note relative ed assolute, che si trovano nelle vecchie logiche, sono quindi di carattere affatto psicologico, ontologico o linguistico. Logicamente tutti i concetti per sè, hanno eguale importanza, e confrontati fra loro non possono stare che in una delle tre relazioni già notate.

Il processo opposto della determinazione, si chiama la generalizzazione e corrisponde ad una divisione logica ¹⁾.

Dato un concetto

$$x = abedef \dots$$

colla generalizzazione (divisione successiva per i singoli fattori), si astraggono successivamente le note *f*, *e*, *d*.... e si ottengono i concetti

$$abede, \quad abcd, \quad abc. \dots$$

.....
1) Le operazioni inverse della sommazione e della moltiplicazione logica non sono sempre eseguibili nè univoche; potendo esser p. es.

$$a + e = b + c \quad (\text{od} \quad ac = bc)$$

senza che sia $a = b$. Cfr. la legge d'assorbimento Esercizio 17 al § 8. Però in casi speciali si può definirle (p. es. la sottrazione $- b$ quando sia $a > b$. (Vedi *Fondamenti* p. 9 segg.) ed è ad ogni modo

$$(a + b) - b = a \quad \text{ed} \quad ab : b = a.$$

Cfr. SCHRÖDER *op. cit.* p. 478 segg.

dei quali ciascuno è maggiore — o al meno eguale — al seguente, e che si dicono generalizzazioni di x .
P. es. « nave a vapore da guerra corazzata » « nave a vapore da guerra » « nave a vapore »

Questo procedimento per le note f, e, d che vengono tolte si chiama astrazione. « Corazzata » « da guerra » « a vapore » sono le note astratte.

Le due operazioni del determinare e dell'astrarre non possono essere proseguite all'infinito, ma hanno un certo limite. Cioè si danno certi concetti

$$x = abedef$$

che coll'aggiunta di altre note (p. es. g) non vengono determinati maggiormente; o in altri termini, non si dà un altro concetto, g , tale che sia

$$xg < x.$$

Questi sono i concetti individuali, che stanno con ciascun altro concetto o in III o in I relazione (come subordinati): Il prodotto xg è eguale a zero o ad x secondo che avviene il primo o il secondo caso. P. es.

$$x = \text{la città più popolosa d'Italia (Napoli)}$$

se prendo

$$g = \text{« marittima » sarà}$$

$$xg = x \quad (\text{I relazione})$$

se prendo

$$g = \text{« posta sull'Adriatico » sarà}$$

$$xg = 0 \quad (\text{III relazione})$$

È dimostrato ¹⁾ che prendendo un numero sufficiente di note si può pervenire — o avvicinarsi quanto più ci piace — ad un dato concetto individuale; come pure è dimostrato, che soltanto con un concetto individuale può arrestarsi la determinazione.

I concetti individuali pertanto sono i minimi concetti, oltre i quali non è che lo zero e corrispondono in certo modo alle quantità evanescenti o differenziali dell'analisi.

Parimenti si danno certi concetti *a* tali che non possono essere maggiormente generalizzati, cioè non possono essere rappresentati come prodotti di due altri concetti, e quindi nessuna altra nota, diversa da *a* stesso, può venire da essi astratta.

Questi sono i concetti più universali chiamati dai logici categorie. P. es. « sostanza ».

Essi sono i concetti massimi, oltre i quali non v'è che tutto il pensabile, (l'1) e sono analoghi ai numeri primi che non hanno altro divisore che sè stessi, e l'unità.

Come si vede il 0, l'1, l'individuo e le categorie sono definiti logicamente solo in relazione ad altri concetti (di cui essi sono certo minimi o massimi); la ricerca di una definizione assoluta dei medesimi, cioè quali siano di fatto, per sè stessi, conduce a questioni di natura metafisica (che talvolta s'appoggiano anche alle altre scienze ausiliarie della logica).

Così le dieci categorie enumerate da ARISTOTELE (c. 1-10,

1) *Fondamenti*, p. 13-17.

ποσόν. ποιόν. πρός τι, πού, ποτέ, καίτοι, ἔστιν, ποιεῖν. πᾶς/ειν) e comprese nei due barbari versetti:

*Arbor sex servos ardore refrigerat ustos
viri cras stabo, sed tunicatus ero.*

vennero successivamente ridotte a sette:

*meus mensura quies motus positura figura
crassaque materies dederunt exordia rebns:*

dagli stoici a quattro: ὑποκείμενον (sostanza), ποιόν (qualità) πῶς/εἶλον (proprietà, modificamento determinato) πρὸς τι πῶς/εἶλον (relazione, modificamento relativo): così da GALENO (*Theop. mat.* I. 4, X 129 seg.): οὐσίαι, ἐνέργειαι, πάθημα, διέκκεσις, che riunisce anche le tre ultime in una: συμπεπληγός — a meno che non si voglia ritenere più tosto quanto dice lo scolio DAVID *ad cat.* 6. Brand. Schol. 49 a. 29 — che ne dà cinque, cioè οὐσία, ποσόν, ποιόν, πρός τι, πῶς/εἶλον. Cfr. PRANTI. *Geschichte d. Logik* I. p. 564 nota 85). Questa divisione degli stoici concorda con quelle di CARTESIO e SPINOZA, che distinguono le quattro categorie di *substantia*, *attributum*, *modus*, *accidens*: così pure i moderni logici tedeschi (WUNDT I. p. 103. LOTZE p. 17. SIGWART I. p. 28) enumerano i quattro gruppi:

Gegenstandsbegriff, Eigenschaftsbegriff, Zustandsbegriff, Beziehungsbegriff.

ai quali vengono ricondotte le categorie aristoteliche nel modo seguente: I. οὐσίαι (a cui corrisponde il sostantivo) II. ποιόν, ποσόν (aggettivi, numerali ed avverbi da essi derivati), III. καίτοι, ἔστιν, ποιεῖν, πᾶς/ειν (verbi), IV. πού, ποτέ, πρός τι (avverbi di luogo e di tempo, preposizioni, suffissi dei casi, tempi e modi verbi) Cfr. TRENDELENBURG *Geschichte der Kategorienlehre. Hist. Beiträge zur Philosophie*, I. p. 23 e segg. — che ne propugna l'origine grammaticale: « *Die Kategorien sind die aus der Auflösung des Satzes entstandenen Elemente* » contro di che ZELLER *Philosophie der Griechen* 3. ed. II, 2 p. 264) JOHN LOCKE ne sostiene tre: *sostanza, modo, relazione*; che furono anche ristrette alle due sole: *sostanza e modo* (secondo SIMPL. *ad Categ.* f. 15. E.: οἱ γὰρ περὶ τῶ ἐνοκράτην καὶ Ἀγρόνικον πάντες τῷ καὶ αὐτῷ καὶ τῷ πρὸς τι περιλαμβάνειν δοκοῦσιν, ὅστις περιττόν εἶναι καὶ αὐτοῦς τοσούτων τῶν γενῶν πληθός. — di già ac-

cegnate dall'accademico SENOCRATE, come $\alpha\alpha\theta' \alpha\sigma\tau\acute{o}$ e $\pi\rho\acute{o}\varsigma \tau\iota$ (relazione).

Ci sarebbe ancora la divisione delle 12 categorie di KANT, di cui parleremo al § 12, le quali si riferiscono più specialmente alle forme del giudizio anzichè a quelle del concetto: e poi altre le quali pure non sempre al concetto riguardano, e quindi non sonq i generi universali dei predicabili ($\alpha\alpha\tau\eta\gamma\gamma\sigma\pi\iota\alpha$ o $\gamma\acute{\epsilon}\nu\eta \tau\acute{o}\nu \alpha\alpha\tau\eta\gamma\gamma\sigma\pi\iota\alpha\tau\acute{o}\nu$ cioè *summa praedicabilia*, o *praedicamenta* $\alpha\alpha \alpha\alpha\tau\eta\gamma\gamma\sigma\pi\iota\alpha$ « *praedicari* »).

Sembra accettabile — ed è press'a poco accettato dalla maggior dei filosofi — la distinzione degli stoici, alla quale corrisponde la distinzione dei concetti in concreti ed astratti: riferendosi ai primi la categoria di sostanze, al secondi quella di relazione e qualità [essenziale od attributo, e qualità non essenziale, proprietà o modo] che anche, pur distinguendoli, in una sola categoria (sia essa relazione $\pi\rho\acute{o}\varsigma \tau\iota$, o accidente $\sigma\upsilon\mu\beta\epsilon\tau\eta\gamma\gamma\acute{o}\varsigma$) si possono comprendere. Volendo per altro semplificare sempre più questa divisione, si finisce coll'astrarre (a mezzo della divisione logica), anche l'ultimo fattore caratteristico della categoria e si arriva all' « *universe of discourse* », all'1, come il concetto veramente più universale: come fa il LAMBER, (*Logica formale*, trad. Erber. Zara 1882, p. 21) che osserva: « in senso stretto non c'è che una sola categoria, cioè il concetto più universale dell'Ente ». Però non conviene confondere le categorie con questo concetto più universale; « nell'astrazione dobbiamo fermarci sul penultimo gradino. » Egualmente controverso fu questo concetto più universale, rappresentato dall'1. L'*en* degli stoici, l'« *ens* » degli scolastici fu sostituito dall'« *etwas* » — qualche cosa — di KANT. (*Logik*, Werke ed. Rosenkranz, v. III p. 274): ma con ciò, come osserva giustamente il WUNDT (*Logik*, I p. 102) si hanno di mira soltanto gli oggetti concreti (« *Objectsbegriffe* »), escludendo il « niente » (HEBERWEG, *Logik*, I, ed. p. 117). La classe logica più vasta è sicuramente il « pensabile » (das « *denkbare* » LORZE, *Logik*, p. 53), qualora non si ritenga questa espressione per una mera tautologia, pari al dire che il concetto più vasto è il concetto del concetto. All'1 fu ancora attribuito il significato di « possibile » « vero » ecc.; avendo con ciò speciale riguardo all'uso di questo simbolo nella teoria del giudizio. Ad ogni modo ritenendo per tutti questi simboli le definizioni relative e strettamente logiche non temeremo di andare erranti.

L'1, l'*universe of discourse*, è semplicemente la somma di tutti i concetti che entrano nelle cerchie determinate delle nostre considerazioni: p. es. trattandosi di suoni, l'*universe of discourse* sarà la somma di tutti i singoli suoni, che formano la sfera del concetto generale di suono: per i numeri sarà il con-

cetto generale di quantità e così via. Analogamente per le categorie; e tali sarebbero acutezze e intensità per il suono, positivo, negativo; intero, frazionario; razionale, irrazionale ecc. per il numero.

A questa definizione relativa dell'uno è legata quella della negazione di un concetto: che appunto non è altro che il concetto complementare dell'unità. Così tenendo per « universe of discourse » i colori, « non rosso » non vorrà dire tutto il pensabile meno il rosso, tutto ciò che non è rosso; ma soltanto il complesso dei colori che non sono il rosso. Cfr. WENDT, *Logik*, p. 120 • nella negazione vi è sempre una tacita presupposizione che il concetto negativo ed il positivo, di cui è negazione sieno contenuti in un medesimo concetto generale (che è l'« universe of discourse » del caso nostro).....

Con queste definizioni, concorda quella della eguaglianza relativa o parziale: due quantità si dicono eguali, quando, in una determinata ricerca si può porre una al posto dell'altra. Nel far ciò badiamo soltanto che i due concetti abbiano comuni le proprietà essenziali, quelle cioè che cadono nel « universe of discourse » relativo a quella considerazione, e si trascurano le altre tale è p. es. l'eguaglianza giuridica degli uomini, quella dei pezzi di ricambio nelle macchine, l'eguaglianza di due toni musicali (benché suonati da diversi strumenti) ecc. 1)

L'analogia di questa astrazione con l'intersezione geometrica, nella rappresentazione grafica: come pure quella del così detto spostamento categoriale — che anche con la suesposta relatività delle definizioni concorda (e di cui parleremo al § 14), colla proiezione, può desumersi dai *Fondamenti* p. 25-26.

Esercizi e problemi. Al § 7.

- 1) Dare esempi di concetti individuali e di concetti generici;
- 2) enumerare degli oggetti pertinenti alla classe di un dato concetto generico;
- 3) Dare esempi di nomi collettivi; distinguerli in generici e singolari.
- 4) Dare esempi di concetti concreti e di concetti astratti, distinguere fra questi gl'individuali dai generici.
- 5) Che specie di concetti sono: *Roma, mare adriatico, povertà, ferro, popolo, giovine, giovinezza, gioventù, macchina a vapore, « Duilio », forza la più bella casa della città, il grado di calore del centro della terra, sale, la grande Armada, codello uomo, l'amore di Dante per Beatrice, la flora alpina?*

Quindi in generale che

$$II \quad a = a \quad | \quad \Sigma a = a.$$

17) Dimostrare che

$$a(a+b) = a \quad | \quad a+ab = a \quad (\text{Legge d'assorbimento}).$$

[Si usino i teoremi 14) 15) 16)].

18) Verificare le identità seguenti:

$$\begin{array}{l|l} I & ab = ba \\ II & a(bc) = (ab)c = abc \\ III & a(b+c) = ab+ac \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} a+b = b+a \quad (\text{Legge di com-} \\ \quad \quad \quad \text{mutazione}) \\ a+(b+c) = (a+b)+c = \\ \quad \quad \quad a+b+c \quad (\text{Legge di associa-} \\ \quad \quad \quad \text{zione}) \\ a+bc = (a+b)(a+c) \quad (\text{Legge di} \\ \quad \quad \quad \text{distribuzione}). \end{array} \right.$$

$$19) \text{ Se } a = b, \quad e \quad c = d$$

$$ac = bd \quad | \quad a+c = b+d$$

— ma non vice versa! —.

20) Dare esempi di applicazioni pratiche dei teoremi 14)-19).

21) Dimostrare che

$$\begin{array}{l|l} oa = o \\ o+a = a \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1+a = 1 \\ 1.a = a \end{array} \right.$$

[coll'aiuto del teorema: qualunque sia a , egli è

$$\begin{array}{l|l} a \leq o \\ = \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} a \leq 1 \\ = \end{array} \right.]$$

22) Se

$$ab = 1 \quad | \quad a+b = o$$

egli è

$$a = 1 \quad e \quad b = 1 \quad | \quad a = 0 \quad e \quad b = 0.$$

Si dimostri.

23) Egli è

$$(ab)_1 = a_1 + b_1 \quad | \quad (a + b)_1 = a_1 b_1.$$

Si dimostri.

$$24) \quad (0)_1 = 1 \quad | \quad (1)_1 = 0$$

25) Si esprimono con subordinazioni gli esempi dei n° 8) 9) 11).
Al § 9. 26) Con un concetto a il campo del pensabile è diviso
in due parti disgiunte a ed a_1

$$(\text{essendo} \quad aa)_1 = 0 \quad | \quad a + a_1 = 1).$$

Dati due concetti a e b e le loro negazioni a_1 e b_1 il campo
del pensabile è diviso in quattro parti: ab , ab_1 , a_1b , a_1b_1
fra loro disgiunte.

Essendo.

$$\begin{array}{l|l} (ab)(ab)_1 = aa.bb_1 = a.bb_1 = & ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1 = \\ & = a.0 = 0^3 \\ \text{ed analogamente} & a(b + b_1) + a_1(b + b_1) \\ (ab)(a_1b)_1 = (ab)(a_1b)_1 = & = (a + a_1)(b + b_1) \\ & = 1.1 = 1 \\ (a_1b)(a_1b)_1 = (a_1b)(a_1b)_1 = & \\ & = (ab)_1(a_1b)_1 = 0 \end{array}$$

Le formule $a + \underset{1}{a} = 1$, $ab + \underset{1}{ab} + \underset{1}{a}b + \underset{1}{a}b = 1 \dots$ si dicono sviluppi dell'unità (1) per uno, due, ..., argomenti (a, b, \dots). I singoli membri (prodotti) a, a, \dots e rispettivamente ab, ab, a, b, a, b si dicono costituenti.

Dati n argomenti a, b, c, d, \dots l'1 è diviso in 2^n costituenti, corrispondenti ai singoli prodotti che si ottengono con la moltiplicazione d'ogni argomento più la sua negazione per ciascuno degli altri più la sua rispettiva negazione: cioè corrispondenti ai membri dello sviluppo dell'espressione

$$(a + \underset{1}{a})(b + \underset{1}{b})(c + \underset{1}{c})(d + \underset{1}{d}) \dots = 1.$$

Quanti e quali costituenti (parti disgiunte dell'1) si hanno, essendo dati tre, quattro concetti?

27) Qualora a e b sieno in II relazione, tutti i quattro prodotti ab, ab, a, b esistono cioè sono maggiori di zero.

Che avviene di ciascuno dei medesimi se $a > b$, se $a < b$, e se $a = b$? (I relazione).

Che avviene se a è in III relazione con b ?

28) Rappresentare graficamente il caso in cui tutti i prodotti (costituenti) possibili; di tre dati concetti a, b, c (e loro negazioni), sieno diversi da zero.

È da notarsi che il medesimo caso rispetto a quattro concetti a, b, c, d non può essere rappresentato coi simboli euleriani. Vedi la mia *nota sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche* inserita nel VI volume dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei p. 53 e 578.

29) Illustrare con diagrammi circolari i teoremi e problemi precedenti.

30) Dare esempi pratici dei nn. 23) 26) e 27).

Al § 10. 31) Coll'aiuto dei teoremi precedenti si dimostri che:

$$I. (a + b)(\underset{1}{a} + \underset{1}{b}) = \underset{1}{ab} + \underset{1}{a}b$$

$$II. (a + \underset{1}{b}c)(b + \underset{1}{a}c) = ab$$

$$III. a(b + c) + \underset{1}{c} + \underset{1}{ab} + \underset{1}{a}b = a + \underset{1}{b} + \underset{1}{c} \quad (\text{SCHRÖDER}).$$

32) Si eseguiscano le operazioni [usando i teoremi 16) 17) 18) 26]:

$$[ab \underset{1}{(c + b \underset{1}{c})} + d] [b \underset{1}{(c \underset{1}{c} + d \underset{1}{d})} + a \underset{1}{(c \underset{1}{c} + d \underset{1}{d})}] = \dots$$

$$ab \underset{1}{(a + b \underset{1}{b})} [\underset{1}{(a + b + b \underset{1}{b})} \underset{1}{(a + c + b \underset{1}{b})} \underset{1}{(a + c + b \underset{1}{b})}] + \underset{1}{(a + b \underset{1}{b} + c \underset{1}{c})} \underset{1}{(a \underset{1}{a} + b + c \underset{1}{c})}] = \dots$$

33) Si eseguiscano le seguenti negazioni [usando i teoremi 23) 24) 26):

$$(a + bc) \underset{1}{1} = \dots [= a \underset{1}{1} \times (bc) \underset{1}{1} = \dots]$$

$$[(ac + bc) d] \underset{1}{1} = \dots$$

$$[(a + b) (a \underset{1}{1} + c) + (a + b \underset{1}{1}) ab] \underset{1}{1} = \dots$$

$$34) [a + b + c] \underset{1}{1} = a \underset{1}{1} b \underset{1}{1} c \underset{1}{1}$$

$$[(a + b) (c + d)] \underset{1}{1} = a \underset{1}{1} b \underset{1}{1} + c \underset{1}{1} d \underset{1}{1} \quad (\text{DE MORGAN})$$

$$35) \text{ Se } a = b \text{ è } a \underset{1}{1} b \underset{1}{1} + a \underset{1}{1} b \underset{1}{1} = 0 \text{ e viceversa.}$$

Per dimostrarlo si adopera il teorema 22) (a destra).

36) Tre persone *A*, *B*, *C* sono intente a ricercare dei libri in un negozio. *A* cerca tutte le opere storiche italiane e le novelle straniere legate; *B* opere storiche legate e novelle italiane, purchè non abbiano carattere storico. *C* infine ricerca tutte le opere italiane legate e le novelle storiche non legate. Quali libri sono ricercati assieme da due persone: e sonvi opere che lo sieno da tutti e tre?

[Ponendo $a =$ « italiano », $b =$ « storico », $c =$ « legato »,

d = « novella », ed indicando con A , B , C le opere ricercate dalle rispettive persone, si ottiene:

$$\begin{aligned} AB &= be (a + d), \quad AC = ab (c + d), \quad BC = ac (b + d) \\ ABC &= abc] \quad (\text{VENN}). \quad 4) \end{aligned}$$

37) Dare esempi di *determinazioni*.

38) Formare dagli esempi del n.º precedente, la serie dei concetti generalizzati e quella dei concetti astratti.

39) Si disse che una espressione logica nella quale c'entra il simbolo a , chiamasi funzione di a . La si denoti con $f(a)$. In virtù dei teoremi 16) e 26), eseguendo le operazioni che vi sono in $f(a)$, codesta $f(a)$ si potrà porre nella forma

$$(1) \dots f(a) = Aa + Ba_1 + C,$$

dove A , B , C non contengono a nè a_1 [all'uopo basta raccogliere in uno tutti i termini che contengono a come fattore, e quindi estrarre a quel fattore comune; e si ha Aa . Analogamente per Ba_1 . Termini che contengono a ed a_1 non si danno (teor. 26). In C stanno tutti i teoremi che non contengono nè a nè a_1].

Moltiplicando ambi i membri dell'eguaglianza per $a + a_1$ si ha:

$$(a + a_1) f(a) = Aa (a + a_1) + Ba_1 (a + a_1) + C(a + a_1)$$

$$1. f(a) = Aa + Ba_1 + C(a + a_1)$$

$$(2) \dots f(a) = (A + C) a + (B + C) a_1$$

Ponendo ora nella (1) $a = 1$ e quindi $a_1 = 0$ si ha

1) Cfr. SCHRÖDER *op. cit.* p. 392.

$$\begin{aligned} f(1) &= A.1 + B.o + C \\ &= A + C, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$f(o) = B + C$$

Quindi

$$(3) \dots f(a) = f(1) \cdot a + f(o) \cdot a_1$$

dove $f(1)$ e $f(o)$ sono ciò che diviene $f(a)$ qualora si sostituisca rispettivamente 1 e o per a . La formola (3) si dice sviluppo della $f(a)$ per l'argomento a . (BOOLE).

Analogamente per più argomenti:

$$(4) \dots f(a, b) = f(1, b) a + f(o, b) a_1 \quad \text{per la (3);}$$

considerando la $f(a, b)$ come funzione di a . E quindi, sviluppando per b :

$$f(1, b) = f(1, 1) b + f(1, o) b_1$$

$$f(o, b) = f(o, 1) b + f(o, o) b_1$$

Sostituendo questi valori nella (4) si ha:

$$\begin{aligned} (5) \dots f(a, b) &= f(1, 1) ab + f(1, o) ab_1 \\ &\quad + f(o, 1) a_1 b + f(o, o) a_1 b_1 \end{aligned}$$

Si trovi lo sviluppo di $f(a, b, c) \dots$ ed il termine generale per lo sviluppo di $f(a, b, c \dots n)$.

Si vede che « ogni espressione contenente a, b, c, \dots può porsi in forma di una somma ove ogni singolo addendo consta di un costituente dello sviluppo dell'1 per a, b, c, \dots (vedi 26) — moltiplicato per un fattore indipendente da a, b, c, \dots , eguale al valore che assume l'espressione data, qualora nella medesima si pongano tanti 1 per i simboli positivi e tanti 0 per i simboli negativi, che compariscono nel costituente ».

40) I fattori dei costituenti nello sviluppo di una funzione, si dicono *coefficienti*. Tali sarebbe in 3): $f(1)$ e $f(0)$; in 5) $f(1,1)$, $f(1,0)$, ... ecc. Questi coefficienti, che non contengono gli argomenti, possono contenere altri concetti, che entrano nell'espressione data. Però se la espressione data fu sviluppata per tutti i simboli che contiene, p. es. se la funzione

$$f(ab) = f(1,1) \underset{1}{ab} + f(1,0) \underset{1}{ab} + (0,1) \underset{1}{a} \underset{1}{b} + f(1,1) \underset{1}{a} \underset{1}{b}.$$

è *solamente* funzione di a e b , allora i coefficienti $f(1,1)$, $f(1,0)$, ... non potranno contenere che 1 e 0; e quindi, per teoremi 21) e 24) dovranno essi medesimi essere eguali o ad 1 o a 0. Se sono tutti eguali ad 1, allora la funzione si riduce allo sviluppo dell'1 per i due argomenti a e b . Altrimenti, se alcuni scompaiono altri no la funzione avrà la forma di una somma di vari costituenti a $b, a b, \dots$, cioè sarà eguale ad

una somma disgiunta [e incompleta]:

$$\Sigma ab$$

dove gli a e b potranno o no avere l'indice della negazione.

Analogamente per più argomenti.

Così $a + \underset{1}{be}$ che è funzione dei soli singoli a, b, c si riduce alla somma disgiunta

$$abe + \underset{1}{ab}c + \underset{1}{ab}c + \underset{1}{1} \underset{1}{1} + \underset{1}{1} \underset{1}{1}$$

[all'uopo basta moltiplicare l'espressione di sopra per $(a + \underset{1}{a})$]

$$(\underset{1}{b} + \underset{1}{b}) (\underset{1}{c} + \underset{1}{c})].$$

41) « Per ridurre una espressione a somma disgiunta, basti moltiplicare ciascun addendo per lo sviluppo dell'1 per gli argomenti che non entrano in questo addendo, e quindi fare le debite semplificazioni ».

11) « La negazione di una somma disgiunta è eguale alla somma disgiunta complementare per lo sviluppo dell'1 ».

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \text{P. es.} & (abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c) & = & abc & + & ab\bar{c} & + & a\bar{b}c & + \\
 & & & \text{1 1} & & \text{1 1} & & \text{1 1} & \\
 & a\bar{b}\bar{c} & + & a\bar{b}c & & & & & \\
 & \text{1 1} & & \text{1 1} & & & & &
 \end{array}$$

42) 1) Quali persone possono intervenire in una festa data da una società, che inviti i propri soci e i militari?

[si tratta di mettere in forma di somma disgiunta « socio » + « militare »].

11) Ridurre a somme disgiunte le espressioni 31) III, 32) 33) 36); e le loro negazioni.

CAP. III

Dottrina del giudizio

§ 11. Definizione del giudizio — § 12. Distinzioni

§ 13. Relazioni dei giudizi — § 14. Operazioni coi giudizi
Giudizi composti — § 16. Problema di Jevons e Clifford

§ 11. Il giudizio ¹⁾ è l'espressione delle relazioni dei concetti. Se esprime una relazione fra due concetti il giudizio è semplice; se esprime una relazione fra più

1) « enunciato », « enunciazione », « asserzione » e con riguardo all'espressione grammaticale « proposizione ». Lat. « judicium » « proloquium » (VARRONE) « oratio » « pronuntiatio » (CICERONE) Greco ἀπόφανσις (ARISTOTELE) συμπλῶξήν ὀνομασίων (PLATONE. Theæt. 202) ἀξιωμα (stoici), πρότασις. Ingl. « judgment », « statement ». Franc. « proposition ». Ted. « Urtheil » « Aussage ».

concetti, multiplo. In tutti e due i casi si dirà anche elementare, esprimendo *una* relazione. Se esprime più relazioni, si dice giudizio composto o complesso di giudizi elementari.

Questa definizione del giudizio è strettamente logica: poichè tale è la relazione dei concetti. La espressione poi è di solito la parola; ma anche, svincolandosi dalle restrizioni linguistiche, può essere diretta, qual'è quella simbolica già usata, o la rappresentazione grafica.

Le dottrine che prendono il giudizio, anzi che il concetto, come forma primitiva devono darne una definizione extra-logica. La definizione degli associazionisti è psicologica, derivandolo dall'associazione delle rappresentazioni: è pure psicologica quella del WUNDT ¹⁾ che lo spiega colla « decomposizione di una rappresentazione complessa nelle sue parti similari ». La definizione aristotelica ²⁾ del giudizio quale « λόγος ἀποφαντικός (*dictum enunciativum*), il quale può essere vero o falso », è d'indole grammaticale. È anche di natura metafisica, avendosi riguardo della realtà oggettiva, quale criterio della verità o della falsità dell'asserto ³⁾. Un'altra definizione linguistica è quella del MILL ⁴⁾: « il giudizio è una enunciazione, nella quale un concetto viene affermato o negato (quale predicato) ad un altro. HERBART ⁵⁾ pone come essenziale la distinzione fra soggetto (rappresentazione prima) e predicato (rappresentazione seconda) — contro quanto diremo al § 12 — « nel giudizio si uniscono due concetti, dei quali uno vien posto pel primo, e l'altro segue a quello ». TRENDLENBURG ⁶⁾ e SCHLEIERMACHER ⁷⁾ danno definizioni metafisiche, dicendo che « il giudizio è una forma del pensiero che risponde all'unione reale delle cose » (cfr. i passi d'Aristotele più su citati). Similmente l'UEBERWEG ⁸⁾: « l'essenza del giudizio sta nella consapevolezza della validità oggettiva di una unione soggettiva di rappresentazioni ».

1) WUNDT *op. cit.* I p. 137.

2) ARIST. de enunc. 4: ἔστι δὲ λόγος ἀπὸς μὲν σημαντικός.... ἀποφαντικός δὲ οὗ πᾶς, ἀλλ' ἐν ᾧ τὸ ἀληθεύειν ἢ ψευδεσθαι ὑπάρχει.

3) ARIST. *metaph.* v. 10: ὥστε ἀληθεύει μὲν ὁ τὸ διχρημένον οἰόμενος διηρησθαι καὶ τὸ συγκαίμενον συγκαίσθαι, ἐφυσταὶ δὲ ὁ ἐναντίως ἔχων ἢ τὰ πράγματα.

4) MILL, *op. cit.* I p. 19 — 5) HERBART, *Logik*, « Werke » vol I p. 92.

6) TRENDLENBURG, *Logische Untersuchungen*. 2. ed. II vol. p. 210.

7) SCHLEIERMACHER, *Dialektik*, § 190 seg.

8) UEBERWEG, *Logik*. 4. ed. p. 154.

Potendosi ogni relazione fra i concetti ridurre alla subordinazione (§ 8, fine); ogni giudizio semplice avrà la forma

$$a < b.$$

o al più

$$a = b$$

quando la subordinazione è reciproca: e si leggerà
« a è b ».

Talvolta la riduzione di un giudizio alla subordinazione può presentare alcune difficoltà — e bisogna ricorrere al così detto *spostamento categoriale* (*Kategoriale Verschiebung*, WUNDT). Ecco in che consiste: Per la relatività delle definizioni logiche (§ 10, osservazione) noi possiamo confrontare fra di loro ed operare solamente con concetti che sono sottoposti al medesimo 1. Tali concetti, la cui somma dà appunto il determinato campo del pensabile, chiameremo omogenei. P. es. dato come 1, il concetto generico « colore », io saprò che sia « rosso », non « rosso » etc., potrò confrontare un colore con un altro e così via. Oppure dato come campo pel pensabile il concetto di « sostanza », potrò confrontare qualunque « cosa » con un'altra. Però se prendo due concetti pertinenti a diversi campi del pensabile, non li potrò direttamente confrontare tra di loro — si avrà al più una *subsunzione* ma non una subordinazione. — Per far ciò bisognerà che introduca un nuovo 1, che comprenda i due campi del pensabile dati, cioè sia non minore della loro somma. Allora gli 1 di prima diverranno categorie soggette ad un medesimo (nuovo) 1: e il confronto sarà possibile, trasportando un oggetto da una categoria all'altra. P. es. i concetti « giglio » e « bianco » non posso confrontare tra loro perchè uno è una « sostanza », l'altra è una « relazione » (« stato »). Ma spostando quest'ultima categoria in quella sostanza avrò il concetto « oggetto bianco » e la subordinazione « giglio » < « oggetto bianco ».

Questa conversione dei concetti astratti nei corrispondenti concreti è molto raccomandata dal BAIX, e se ne daranno esempi negli esercizi.

Con uno spostamento inverso si ottiene la subordinazione:

$$\text{« colore del giglio »} < \text{« bianco »}$$

Sul modo di rappresentare tutti i giudizi mediante substitutionsi, tratta lo SCHÖDNER ¹⁾.

Ogni giudizio semplice si potrà servire

$$a \leq b.$$

Il concetto *a*, minore o al più eguale a *b*, si chiama *soggetto*; ²⁾ il concetto *b*, maggiore o al meno eguale ad *a*, si chiama *predicato*; ³⁾ il segno \leq , che esprime appunto l'essere minore o al più eguale, e che si legge « è », si chiama *copula*. ⁴⁾ Soggetto e predicato si dicono *termini* del giudizio o della proposizione.

Naturalmente in quei giudizi in cui il predicato è verbale, copula e predicato sono uniti in uno; p. es. « *Ciro regna* »; ma si può staccare il verbo *essere* dal predicato: « *Ciro è re* » (WUNDT). In modo analogo un giudizio della forma

« *A è* » (cioè « *vi è A* » « *A esiste* »), « *A non è* » (« *non esiste* »), non manca di predicato, bensì la copula funge per esso. E si può scrivere.

$$0 < A$$

oppure, nel secondo caso,

$$A = 0$$

Questi giudizi si dicono *esistenziali*, ed esprimono pure una relazione tra due concetti, uno dato esplicitamente, *A*, l'altro

1) SCHÖDNER op. cit. p. 141-155.

2) Intorno al vario significato del vocabolo « soggetto » (ὑποκείμενον) nella filosofia, vedi TREDELENBURG, *Elementa logicae aristotelicae*. Berlino Bethgo 1845 (3. ed.) § 1.

3) κατηγόρημα, κατηγόρημα da κατηγόρησις τὴν τινος, predicare, attribuire checchè a checchessia.

4) Cfr. WUNDT p. 143 e segg.; però, secondo la nostra definizione, le sue osservazioni non sono accettabili.

dito implicitamente per le definizioni del capitolo precedente, cioè il 0, o l'1.

Dato un concetto A sono possibili le seguenti relazioni tra esso e lo zero o l'unità:

$$\begin{array}{l|l} 1) A > 0 & 3) A < 1 \\ 2) A = 0 & 4) A = 1 \end{array}$$

(Le altre combinazioni sono assurde, per le definizioni dell'1 e dello 0).

Però siccome la 3) e la 4) si possono scrivere anche

$$3) \begin{array}{c} A \\ 1 \end{array} > 0$$

$$4) \begin{array}{c} A \\ 1 \end{array} = 0$$

si vede che le due relazioni

$$\begin{array}{l} 1) A > 0 \\ 2) A = 0 \end{array}$$

sono le sole due forme essenzialmente diverse di giudizi esistenziali.

La nomenclatura di soggetto e predicato, comune alla grammatica, ha origine dalla legge psicologica del nostro pensiero, per la quale con ogni singolo atto della mente non possiamo cogliere che *una* relazione fra due rappresentazioni: non possiamo formare che un giudizio semplice alla volta. Le due rappresentazioni che consideriamo sono appunto quelle che denominiamo soggetto e predicato. Il soggetto, a , è la prima che ci apparisce nella nostra coscienza, dalla quale partendo perveniamo alla seconda, b , — il predicato, — che si considera come derivato dalla prima, come riferito od attribuito ad essa. Il prodotto del giudizio è una determinazione, un concetto composto, ab , « a che è b », risultato del giudizio compiuto « a è b ». Pertanto alcuni logici (KANT, LOTZE, DROBISCH, HAMILTON) considerano il giudizio come l'espressione dell'unione di due concetti. Altri, all'incontro, (WUNDT) sostengono che il giudizio non unisce ma separa i concetti (dove il nome tedesco « Ur-theil » « separazione primitiva »); avvegnachè dicendo « a è b » si riconosce che a contiene in sé la nota b , e così dicendo la si distingue da esso: in altri termini sostengono che

nella nostra coscienza il soggetto ci si presenta come una rappresentazione complessa, dalla quale, a mezzo del giudizio, viene analiticamente segregato il predicato. « ab » non è il risultato del giudizio « $a \in b$ », sibbene questo di quello. Ma il decidere tra queste opinioni disparate è affare di psicologia. — Dal lato linguistico si può pure parlare di unione o disunione di concetti: a seconda che il giudizio è affermativo — $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\varphi\alpha\varsigma$ — o, comq. dicono alcuni logici, se alla domanda se si possono unire i concetti si risponde con un *sì* (LINDNER), oppure è negativo — $\alpha\pi\acute{o}\varphi\alpha\varsigma$, se si risponde con un *no*: e c'entra un *non* (*in*—, *a*— ecc.) sia nel predicato, sia nella copula od anche nel soggetto. Basandosi sulla corrispondenza che passa tra l'idea e l'oggetto corrispondente si può anche parlare di separazione od unione dei due termini, in quanto esse si riferiscono a separazioni od unioni esistenti di fatto tra gli oggetti (vedi il passo già citato d'ARISTOTELE).

Ma non tenendo conto delle rappresentazioni psicologiche, delle parole, degli oggetti ontologici, sibbene delle pure relazioni dei concetti, la distinzione di unione o disunione fra essi ci è indifferente. Non che con ciò si voglia dire che unione o disunione non possono aver luogo: ma è chiaro che una relazione data può riguardarsi rispettivamente tanto come unione che come disunione. P. es. se a e b , sono in prima relazione, esprimendo questa unisco a e b , disunisco a da b (che

sono in III). L'unione e la disunione hanno a che fare colla espressione, ma non con la relazione che è la base del giudizio e della quale esso è espressione.

I termini del giudizio (a , b) non sono (sempre) identici ai concetti (poniamo A , B) della relazione dei quali esso giudizio è l'espressione. Ma se i due concetti dati, A e B , stanno fra di loro nella II o nella III relazione, il rapporto di subordinazione non correrà tra A e B , bensì, per la II relazione, tra una parte di A — che denoteremo con ϵA , ove naturalmente v

1) Il giudizio esistenziale fu introdotto nella logica da EUDEMO: Εὐδήμος δὲ ἐν τῷ πρώτῳ περὶ Λέξεως ἐκίνησε διὰ πλείονον ὅτι τὸ ἔστιν ἐν ταῖς ἀπλάις προτάσεσι κατηγορεῖται καὶ ὅρος ἐστίν, οἷον Σωκράτης ἐστὶ Σωκράτης οὐκ ἔστι. (Schol. cod. Par. 6, BRANDIS 146, a, 19).

non può essere nè eguale nè maggiore di A , dovendo essere $vA < A$; per tanto, *a fortiori*, sarà anche $v < 1$ — e B . per la III tra A e B .

Così che per le tre relazioni la forma generale del giudizio sarà rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & A < B \\ \text{II} & vA < B & \text{oppure } wA < B \\ \text{III} & A < B \end{array}$$

Riducendole tutte alla forma

$$a < b$$

cioè alla forma di *soggetto*, *copula*, *predicato*, si vede che il soggetto (a) ed il predicato (b) sono (solamente) certe funzioni dei concetti A e B : poniamo

$$a = \varphi(A) \quad b = \psi(B)$$

I concetti A e B si chiamano *materia* del giudizio, le funzioni φ e ψ ne costituiscono la *forma*. Così « I corpi sono decomponibili » ed « alcuni corpi sono indecomponibili » hanno eguale materia, forma diversa. « Tutti gli uomini sono mortali » e « tutte le mezzelire sono (ora) monete d'argento » hanno eguale forma, diversa materia.

§ 12. Distinguiamo i giudizi anzi tutto per la loro forma. Le subordinazioni:

- 1) $A < B$ (per la I relazione)
- 2) $A < B$ (per la III relazione)

hanno di comune il soggetto a , che in tutt'e due casi è l'intero concetto A , tutto A . I giudizi che hanno la proprietà di avere il soggetto eguale a tutto un concetto di quelli di cui si esprime la relazione si dicono *universali*.

All'incontro il giudizio

$$3) \quad v \ A < B$$

che esprime la subordinazione a B di una parte di A ; oppure quello

$$4) \quad w \ A < B_1$$

che esprime la subordinazione a B dell'altra parte di A , riferentisi tanto l'uno quanto l'altro alla II relazione, hanno di comune la forma del soggetto a , che nei due casi è sempre soltanto una parte del concetto A . I giudizi che hanno la proprietà di avere per soggetto una parte di un concetto di quelli di cui si esprime la relazione si dicono *particolari*.

I giudizi 1) e 3) hanno in comune il concetto B , per predicato, e si dicono *affermativi*. I giudizi 2) e 4) hanno comune il predicato B_1 , che è la negazione di uno dei concetti di cui si esprime la relazione, e si chiamano *negativi*.

Un giudizio universale e positivo, del tipo 1), si denota con a , uno del tipo 2), cioè universale e nega-

tivo, con *e*: Un giudizio particolare e positivo (tipo 3), con *i*, uno particolare e negativo (tipo 4) con *o* ¹⁾.

Sarà pertanto ogni giudizio della forma

- « tutti gli A sono B » un giudizio *a*,
- « tutti gli A sono non B » un giudizio *e*,
- « alcuni A sono B » un giudizio *i*,
- « alcuni A sono non B » un giudizio *o*.

Si vede che tale distinzione si basa sul fatto che nella subordinazione tipica

$$a < b$$

cioè

$$\varphi(A) < \psi(B)$$

tanto φ che ψ possono avere due valori $[\varphi = \{^A_{vA}, \psi = \{^B_B\}]$.

Il valore della φ determina la *quantità* del giudizio, e per questa il *soggetto* è *universale* o *particolare*; il valore della ψ determina la *qualità* del giudizio, e per questa il *predicato* è *affermativo* o *negativo*. ²⁾.

1) Queste lettere, tratto dalle parole latino « *a t o* » « *n e g o* », compariscono per la prima volta, nel libro, probabilmente apocrifo, *de Dogmate Platonis*.

La relazione scambievole tra questi giudizi apparirà al § 14. Al § 16 si ridurranno a due forme soltanto.

2). ARISTOTELE chiama il giudizio affermativo $\alpha\alpha\tau\acute{\alpha}\varphi\alpha\varsigma\iota\varsigma$, il negativo $\acute{\alpha}\pi\acute{o}\varphi\alpha\varsigma\iota\varsigma$ (da non confondersi con $\acute{\alpha}\pi\acute{o}\varphi\alpha\varsigma\iota\varsigma$ o $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ $\acute{\alpha}\pi\omicron\varphi\alpha\nu\tau\iota\chi\acute{o}\varsigma$, che vale giudizio in generale). Questi vocaboli furono voltati in latino da PLAUTO: « *aientia* » e « *negantia* », da MARCIANO CAPELLA « *dedicativus* » od « *abdicativus* » ed appena da BOEZIO, coi nomi attuali: « *affirmatio* » e « *negatio* » — Per

Bisogna distinguere accuratamente questi « giudizi negativi », nei quali si afferma una subordinazione tra a e B , con la

« negazione di un giudizio » (vedi § 14). Ogni giudizio negativo va risguardato come « predicante negativamente » *negatio prädizierende*, WUNDT, il segno della negazione si applica al predicato \neg benchè nella dizione possa preporrsi alla copula — p. es.

« nessun corpo è eterno »

oppure

« tutti i corpi *non* sono eterni »

equivale a

« tutti i corpi sono *non*-eterni »

ed ha la forma

$$A < B_1$$

Mentre colla negazione od opposto contraddittorio di un giudizio neghiamo che la subordinazione espressa dal giudizio dato, esista. Essa ha la forma

$$(a < b)_1$$

oppure

$$a_1$$

denotando tutta la proposizione $a < b$, con a . Il segno della negazione si riferisce alla relazione, a tutto il giudizio. Così esso equivale al detto:

giudizio universale si ha la parola $\alpha\alpha\theta\acute{\epsilon}\lambda\lambda\omicron\nu \circ \alpha\alpha\theta\acute{\epsilon}\nu\alpha\alpha\sigma\sigma\omicron\nu$, pel particolare $\alpha\alpha\tau\acute{\alpha} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma \circ \acute{\epsilon}\nu \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$: In luogo di « universale »; s'usa ancora l'espressione « totale », « distributivo » ovvero « pieno », in luogo di « particolare », « parziale » « non distributivo », « vago ». Vedi JEVONS, op. cit. p. 45-48 BAIN, op. cit. I. p. 121 seg. DE MORGAN *Syllabus*, London, Walton et Maberly, 1860. p. 60.

« la proposizione $a < b$ è negata, è falsa »;

oppure

« vale l'asserzione z , opposta all'asserzione $a < b$ ».

1

Con questa distinzione è tolta di mezzo la lunga controversia circa i giudizi negativi, se, cioè, la negazione si debba riferire alla copula od al predicato ¹⁾. Bisogna pure porre attenzione al significato del giudizio particolare. La parte (vA) , gli « alcuni » vanno intesi sul senso di « non ogni » « non tutti » ($vA < A$) — forse « nessuno » —. Mentre nella definizione moderna, basata sulle quantità non evanescenti, che si darà al § 16, gli « alcuni » significherebbero « non nessuno » « non nulli » — forse « tutti » —. A questi due significati corrispondono le due diverse notazioni:

$$va < b$$

nel primo senso, e

$$ab > 0$$

(« sonvi alcuni a che sono b ») nel secondo ²⁾.

DE MORGAN ³⁾, ammettendo la qualificazione (la funzione ψ) anche pel soggetto, introdusse altre quattro specie di giudizi, che si ottengono ponendo nelle formole di sopra A in luogo di

1

1) Vedi SCHRÖDER, *op. cit.* p. 319-338. Stanno decisamente dalla parte del torto il LORZE, (*op. cit.* p. 61 seg.) ed il BAIN (*op. cit.* I. p. 121, nota), che non vogliono riconoscere il giudizio negativo, come predicante negativamente, ed il SIGWART, che crede riferirsi alla copula e non ha tutto il giudizio, la negazione di questo.

2) Di più si dirà al § 16. Molti logici, fra i quali alcun moderno italiano, errarono per aver confuso questi due diversi significati del particolare.

3) DE MORGAN, *On the structure of the syllogism*. Trans. of the Cambridge phil. Society, 1846, vol. VIII. p. 381.

A. HAMMILTON ¹⁾ annunziò la quantificazione del predicato, così che — da HALSTED ²⁾ — furono introdotti altri 8 giudizi, ponendo aB e aB in luogo di B e B — 4. L'esposizione completa dei giudizi elementari tra due concetti sarà data pure al § 16.

Però oltre questa distinzione dei giudizi, moltissime altre furono fatte.

IL KANT, sotto il nome di categorie del giudizio, porta le seguenti dodici:

1. Per la qualità	2. per la qualità
Universali	Affermativi
Particolari	Negativi
Individuali	Infiniti
3. per la relazione	4. per la modalità
Categorici	Problematici
Ipotetici	Assertori
Disgiuntivi	Apodittici.

I giudizi individuali, nei quali il soggetto è un individuo, possono riguardarsi come giudizi universali, perchè la relazione espressa si riferisce a *tutto* l'individuo — appunto perchè indecomponibile in parti — vedi però § 23, fine, del Capitolo V.

1) Riducendo i giudizi alle 8 eguaglianze:

1) $a = vb$	5) $va = vb$
2) $a = b$	6) $va = b$
3) $a = vb$	7) $va = vb$
4) $a = b$	8) $va = b$
1	1

Il 2) ed il 6) furono accettati da THOMSON (come forme a ed y) e da SPALDING (come forme a^2 ed b^2) — BAIN, op. cit. I. p. 129 seg., MUIR, op. cit. I. p. 196-198, nota.

2) G. B. HALSTED, *Statement and reduction of syllogism*, Journ. spec. Phil. vol. XII. p. 418.

I giudizi induttivi o limitativi non differiscono dai negativi che per l'espressione: i primi avendo la negazione al predicato, gli altri alla copula. Essi sono equivalenti (vedi più sopra). I giudizi ipotetici sono *relazioni* di giudizi § 13); i disgiuntivi, giudizi composti § 15). La distinzione dei giudizi secondo la modalità, ¹⁾ considera la possibilità, la realtà o la necessità della relazione espressa, e naturalmente deve basarsi su motivi psicologici o metafisici. Di essa pur si dirà alcunché al § 33. Kant distingue ancora il giudizio analitico, nel quale il predicato è già dato implicitamente nel soggetto — a , è prima del giudizio $a < b$ —, dal giudizio sintetico, nel quale il predicato si aggiunge (fra le note) del soggetto appunto col giudizio — ab è prodotto dal giudizio $a < b$ Cfr. § 11, oss.

§ 13. Possiamo confrontare i giudizi fra di loro e, come per i concetti, notare tre relazioni principali.

La prima relazione è quella nella quale esprimendo un giudizio α è anche implicitamente espresso un giudizio β : ogniqualvolta α vi è α , vi è β ; α appare come causa che trae seco β quale effetto: P. es. « ogniqualvolta piove (α), le strade sono bagnate (β) ».

Tale rapporto, che si mostra nel giudizio « se vi è α , vi è β , che si dice ipotetico, ²⁾ si dice rapporto di subordinazione di α a β , e, come per i concetti, si scrive:

$$\alpha < \beta$$

« α è minore o contenuto in β , « α è parte di β » « da α si deduce β ». Pertanto si dice che la causa è contenuta nell'effetto.

1) ARISTOTELE, *Anal. pr.* I, 2: $\pi\acute{\alpha}\sigma\alpha \pi\rho\acute{o}\tau\eta\varsigma \epsilon\sigma\tau\iota\nu \eta \tau\omicron\upsilon \delta\pi\acute{\alpha}\rho\chi\epsilon\iota\nu \eta \tau\omicron\upsilon \xi\epsilon \acute{\alpha}\nu\alpha\gamma\kappa\eta\varsigma \delta\pi\acute{\alpha}\rho\chi\epsilon\iota\nu \eta \tau\omicron\upsilon \epsilon\nu\delta\iota\kappa\tau\omicron\upsilon\tau\alpha\iota \delta\pi\acute{\alpha}\rho\chi\epsilon\iota\nu$.

2) $\delta\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$, $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\nu$ (*stoici*) onde il « *coniunctum* » o « *adiunctum* » dei latini, che appena da Boezio si chiamò ipotetico.

Il termine minore (protasi) si disse $\eta\gamma\gamma\omicron\mu\epsilon\nu\omicron\nu$, il maggiore (apodosi) dagli aristotelici $\epsilon\pi\acute{\alpha}\mu\epsilon\nu\omicron\nu$, dagli stoici $\lambda\eta\gamma\omicron\nu$. La conseguenza, espressa nel segno $<$, $\acute{\alpha}\kappa\omicron\lambda\omicron\upsilon\theta\iota\varsigma$.

In tale rapporto stanno i giudizi a ed i , e ed o , quando hanno rispettivamente eguale materia. Di modo che è

$$a < i$$

$$e < o$$

Quindi si dice che il giudizio universale è subordinato al giudizio particolare, avente eguale materia e qualità. ¹⁾ P. es.

se « tutti gli uomini sono mortali, » « alcuni uomini sono mortali »,

se « nessun uomo nasce schiavo, alcuni uomini non nascono schiavi ».

Il segno $<$ si può leggere « quindi » « perciò » ... (*ergo*).

Naturalmente la subordinazione di α a β non si può interpretare in senso inverso, cioè che « tutte le volte che v'è β , vi è α »; allora sarebbe $\beta < \alpha$.

Se valgono assieme, come caso speciale, tanto $\alpha < \beta$ che $\beta < \alpha$, si dice che le proposizioni α e β sono equivalenti, equipollenti, identiche, eguali e si scrive

$$\alpha = \beta$$

P. es. « Indebolimento fisico produce abbattimento morale » ed « Abbattimento morale produce indebolimento fisico ».

1) Ciò concorda con quanto si dirà al § 11 intorno alla sfera dei giudizi. — Invece noi concepiamo il concetto universale è sovraordinato al particolare, l'onde, avendo ritenuta per sfera del giudizio, quella del soggetto — p. es. *Baris ap. ult.* p. 117 — d'altra quasi sempre si disse che il giudizio particolare è subordinato all'universale (?).

α e β sono scambievolmente causa ed effetto (azione reciproca: *Wechselwirkung*).

Quando di un giudizio α solo una parte è subordinata a β , e un'altra no, si dice che α e β stanno in seconda relazione o in interferenza.

Tale rapporto si mostra come giudizio ipotetico della forma; « alle volte se vi è α vi è β » od « alle volte se vi è α non vi è β » p. es.

« alle volte se il barometro è alto il cielo è sereno »
ed « alle volte se il barometro è alto, il cielo non è sereno »

Si scrive

$$\alpha \text{ int. } \beta;$$

ed, il segno *int.* essendo simmetrico, è pure

$$\beta \text{ int. } \alpha$$

« alle volte se il cielo è sereno il barometro è alto » ecc.

Quando nessuna parte di α è subordinata a β , si dice che α e β stanno in III relazione, che sono fra loro disgiunti, contrari....

Tale rapporto si mostra nel giudizio ipotetico, « giammai se vi è α vi è β » oppure « se vi è α non vi è β ». p. es.

« Giammai se v'è plenilunio, v'è eclissi di sole »

Si scrive

$$\alpha) (\beta$$

ed, il segno) (essendo simmetrico, è pure

$$\beta)(\alpha$$

« Quando s'eclissa il sole non v'è plenilunio »

I giudizi che stanno in questo rapporto ed hanno eguale materia sono i giudizi α ed ϵ : p. es.

se « nessun corpo semplice è decomponibile, » è falso che « tutti i corpi semplici sieno decomponibili ».

e « tutti gli uomini sono mortali » è falso che « nessun uomo è mortale ».

§ 14. Di una serie di giudizi $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ disposti in modo che sia

$$\alpha < \beta < \gamma \dots < \lambda,$$

chiamiamo λ il massimo, α il minimo. P. es.

« piove » < « le strade sono bagnate » < « c'è più pericolo di cadere » < « conviene camminare con cautela »....

« piove » è un *minimo*, « conviene camminare con cautela » un *massimo*.

1) Alcuni distinguono la identità o perfetta eguaglianza (ισότης) di contenuto e di sfera, dalla equipollenza (ισοδυναμία) che sarebbe una eguaglianza di sfera e non di contenuto. Per altro, avuto riguardo al principio della relatività delle nostre definizioni, sembrami di potersi ritenere, autorizzati a non ammettere quest'ultimo caso e quindi ad usare di tutti questi vocaboli senza distinzione. Su di ciò mi riservo di trattare altrove.

Si dice *somma* di due giudizi α e β , il minimo giudizio che contiene sì α che β , e si denota con $\alpha + \beta$ che si legge « α più β », ed esprime la sussistenza d'uno almeno dei due giudizi. P. es.

« ha piovuto (α) » o « c'è stata una forte nebbia » (β).
 « Il triangolo ha due angoli eguali », $=$ « il triangolo è isoscele » $+$ « il triangolo è equilatero ».

Si dice *prodotto* di due giudizi α e β , il massimo giudizio contenuto sì in α che in β , e si denota con $\alpha \cdot \beta$ che si legge « α moltiplicato β », ed esprime la sussistenza contemporanea dei due giudizi. P. es.

« Alcuni corpi semplici sono metalli » e « il mercurio è liquido ».

« l'ungo dell'acqua ad una temperatura di 100° C. » \times « lo stato barometrico, igrometrico dell'ambiente è normale » $<$ « l'acqua bolle ».

La somma dei massimi giudizi che entrano nella ricerca, rappresenta il giudizio maggiore di tutti i giudizi, che tutti li comprende e che non è condizionato da nessuno. E un giudizio che vale sempre, che è identicamente vero e si segna con 1.

Per ogni giudizio α sarà adunque $\alpha = 1$ oppure $\alpha < 1$.

$\alpha = 1$ vorrà dire che il giudizio α è *sempre* vero; $\alpha < 1$ vorrà dire che α non è sempre vero.

Il prodotto dei minimi giudizi o in generale il prodotto di due giudizi che stanno fra di loro nella III

relazione, è un giudizio che non sussiste, e rappresenta un detto impossibile. Si segna con 0:

Di modo che $x = 0$, vorrà dire il giudizio x non è mai vero, che è *sempre falso*; all'incontro l'altro caso possibile $x > 0$, vorrà dire che x non è sempre falso, ma che è talvolta vero. ¹⁾

La somma delle parti di un giudizio si chiama la sfera di esso giudizio, il prodotto dei giudizi di cui esso è parte, il contenuto. ²⁾

La somma di tutti i giudizi che stanno nella III relazione con un dato giudizio x si chiama negazione od opposto contraddittorio di x e si scrive x_1 che si legge *non x*.

Quindi per definizione è

$$x + x_1 = 1$$

$$xx_1 = 0$$

Si dimostra che per ogni x un tale x_1 esiste, ed uno solo; ed è

$$(x_1)_1 = x.$$

Perciò da

$$x = 0 \quad \text{si deduce} \quad x_1 = 1$$

1) Cfr. § 16.

2) Cfr. le definizioni analoghe date per la sfera e contenuto di un concetto al § 9.

$\alpha > 0$	»	$\alpha < 1$ 1
$\alpha < 1$	»	$\alpha > 0$ 1
$\alpha = 1$	»	$\alpha = 0$ 1

e viceversa.

Conoscendo la relazione tra A e B espressa dal giudizio α , importa conoscere quale relazione è espressa dalla sua negazione. Se α è un giudizio semplice α_1 negherà che la relazione espressa da α abbia luogo e quindi affermerà che abbia luogo delle altre relazioni possibili. P. es. negando il giudizio α ,

$$A < B$$

si afferma che ha luogo o $A \text{ int. } B$ o $A > B$ o $A \text{) } (B$: ciò che vale all'asserire che « alcuni (forse tutti) A sono B » — come risulta dall'ispezione delle figure euleriane. Quindi la negazione del giudizio a è un giudizio o . Analogamente la negazione di un giudizio e è un giudizio i .

Così si hanno le relazioni:

$$\begin{array}{cc} a = o & o = a \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} e = i & i = e \\ 1 & 1 \end{array}$$

Al § 16 si insegnerà a trovare la relazione od il sistema di relazioni corrispondente alla negazione di una relazione o di un sistema di relazioni date, fra due o più quantità logiche.

Per la definizione della negazione è

$$[x)(y] = [x < \bar{y}]$$

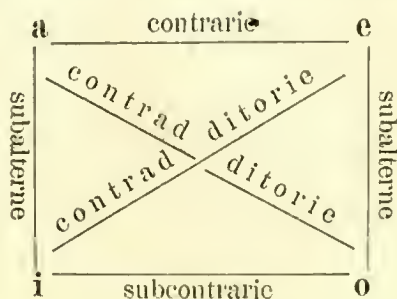
$$[a \text{ int. } \bar{y}] = [xy < \bar{y}] [wx < \bar{y}]$$

ed ogni relazione fra i giudizi è ridotta alla subordinazione.

Le formule soprascritte in unione a quelle ricavate al § 13, servono per rappresentare tutte le relazioni che corrono tra i giudizi *a*, *e*, *i*, *o*, di medesima materia. E sono le seguenti:

$a = a$	$i > a$	$e < a$	$o = a$
$a < i$	$i = i$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$a < e$	$i = e$	$e = i$	$o > e$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$o > i$
$a = o$	$i > o$	$e = e$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$e < o$	$o = o$

che possono dedursi dal così detto quadrato logico ¹⁾



1) Le relazioni o lo figure del quadrato logico sono già dati da Aristotele o dai suoi primi commentatori: per altro scambiano il posto dell'*e* con l'*o*.

La subalternazione ¹⁾ esprime la subordinazione di a , e ad i , o (e, naturalmente la sovraordinazione di i , o od a , e), per cui dalla verità di a , o di e si deduce la verità di i o di o , o dalla falsità di i o di o si deduce la falsità di a o di e : Da

	$a = 1$		$e = 1$
si deduce	$i = 1$		$o = 1$
e da	$i = 0$		$o = 0$
si deduce	$a = 0$		$e = 0$.

La contrarietà ²⁾ esprime la disgiunzione tra a ed e , per cui dalla verità di a o di e , si deduce la falsità di e o di a .

Se	$a = 1$		$e = 1$
allora	$e = 1$ 1		$a = 1$ 1
cioè	$e = 0$		$a = 0$.

a ed e non possono essere entrambe contemporaneamente vere ($ae = 0$).

1) ὑπάλληλται, « alternatim » (M. CAPELLA) « subalternae » (BOEZIO).
 2) ἐναντία; ἐναντίας δὲ τὴν τοῦ καθόλου κατάφασιν καὶ τὴν τοῦ καθόλου ἀπόφασιν... διὸ τούτοις μὲν οὐκ εἶναι τε ἅμα ἀληθεῖς εἶναι.
 (Arist. de interpr. 7) « incongruae » (M. CAPELLA) « contrariae » (BOEZIO).
 (« subcontrarie » secondo DE MORGAN).

La contraddizione ¹⁾ esprime la negazione di a ed e con o ed i , per cui dalla verità o falsità di a od e si deduce la falsità o verità di o od i . Da

	$a = 1$		$e = 1$
si deduce	$o = 1$		$i = 1$
	1		1
cioè	$o = 0$		$i = 0$
E da	$a = 0$		$e = 0$
si deduce	$o = 1$		$i = 1$.

E vice versa, a ed o , e ed i non possono essere entrambe false nè entrambe vere. ($ao = 0$, $ei = 0$, $a o = 0$, $e i = 0$).

La subcontrarietà ²⁾ esprime la subordinazione di i ¹
od o ad o ed i per cui dalla verità di i ed o cioè
¹ ¹ ¹ ¹
dalla falsità di i ed o , si deduce la verità di o ed i .

Se	$i = 1$		$o = 1$
	1		1
cioè se	$i = 0$		$o = 0$
è	$o = 1$		$i = 1$

1) ἀντιφατικαί « pugnautes » contradictoriae » (DE MORGAN « contrario »).

2) ἀντικεισόμεναι κατὰ τὴν λέξιν μόνον (ARISTOTELE. *Anal. pr.* II, 15). ὑπεναντίαι (AMMONIO). « supparae » « subcontrariae » (DE MORGAN « ipercontrarie »).

i ed o non possono essere entrambi falsi ($o \text{ i} = 0$).

Naturalmente poi ciascuno dei giudizi a , e , i , o è identico a sè stesso: cioè $a = a$, $e = e$,... ecc.

Ma qui va fatta un'osservazione che toglie lo stretto rigore alle formule costituenti il quadrato logico. L'« *alcuni* » del giudizio *o* opposto contraddittorio di *a*, va inteso nel senso di « non nessuno, forse tutti » cioè la negazione di

$A \leq B$

$$\dot{\mathbf{c}}: \quad \mathbf{AB} \geq \mathbf{0} \quad (\text{cfr. } \S 16)$$

mentre nel giudizio o subordinato ad *e*, l'alcuni vuol dire « parte, non tutti » cioè

$$A < B$$

è subordinato a

$$v_A < B.$$

E così pel giudizio *i*. Le relazioni tra i giudizi saranno trattate nuovamente al § 16.

Si vede che il medesimo simbolismo che usiamo pei concetti e per le loro relazioni è qui riprodotto per i giudizi e per le loro relazioni. Quindi ogni scrittura logica può interpretarsi indifferentemente come espressione di relazioni ed operazioni coi concetti, oppure come espressione di relazioni ed operazioni coi giudizi. E considerando i giudizi secondo la loro sfera,

ci potremmo valere nuovamente dei simboli enleriani, nei quali la estensione di un giudizio può anche essere considerata come estensione di un concetto, e, cioè, come « campo di validità » di esso giudizio, come « somma delle occasioni nelle quali esso è vero ». Poichè i singoli giudizi che sono parti della sfera del giudizio dato, interpretati come concetti sono appunto i momenti, le occasioni nelle quali il giudizio è vero. Se esso è vero sempre (in tutti i momenti, per tutte le occasioni) cioè se è identico, la sua sfera, α , che convenimmo essere allora eguale ad 1, equivale alla massima grandezza del campo di sua validità, espresso dall'analogo segno per l'« universe of discourse » dei concetti. Se esso è alle volte vero, la sua sfera è $>, 0, < 1$, e corrisponde a quel pezzo determinato del campo del pensabile pel quale è vero. Se esso è falso (cioè in verun momento od occasione è valido) il campo di sua validità è nullo; in tal caso naturalmente sarà identicamente vero il suo contraddittorio, che ha sfera α_1 , complementare di α per l'1, ecc. . .

Il Sig. HUGH MC COLL, ha usato per primo i segni 0 ed 1 per esprimere la verità e la falsità dei giudizi ¹⁾ ma senza darne

1) HUGH MC COLL, *The calculus of equivalent statements*. (Proc. of the London math. Soc. vol. IX. 1877 p. 9): « The above title seems to be the most suitable for an analytical method which I discovered a few months ago, and to which a short introduction was published in the « Educational Times » for last July, under the name of « Symbolical Language »... The fundamental principles of the method are as follows: Let any symbol, say A, B, C etc. denote statements (or propositions)..., Then the equation

$$A = 1$$

asserts that the statement A is true: the equation

$$A = 0$$

asserts that the statement A is false... » Sulla riduzione di ogni giudizio alla forma $A = 1$ vedi esercizi.

la ragione, ed anzi imperfettamente non si convenendo ad un giudizio semplicemente vero il segno 1, che spetta alla identità: ma il segno > 0 . GEORGE BOOLE ¹⁾ aveva però ancor prima, posto in risalto la importanza della idea del tempo nel quale un giudizio è vero (cioè se sempre, alle volte o giammai): quindi CHARLES PIERCE ²⁾ quello della classe delle occasioni nelle quali è vero. PEANO ³⁾ introduce una classe $(x : z)$ per tutti quei valori (x) - del soggetto - che soddisfanno all'equazione logica (x) . Naturalmente allora questa classe è misura della validità della proposizione z : però il giudizio può allora essere sempre vero se $(x : z) = a$; cioè se tal classe è eguale a tutto il soggetto, senza che sia necessariamente $(x : z) = 1$. Volendo essere conformi alla scrittura di prima la sfera di validità del giudizio si dovrebbe esprimere con $[x : z]$, che sarebbe il rap-

porto della classe dei concetti soddisfacenti l'equazione, la quale classe è parte del soggetto, colla classe del soggetto. Allora è tale rapporto eguale ad 1 e a 0, quando il giudizio è sempre o giammai vero: ed essa rapporto corrisponde al noto significato dell'1 e del 0 nella teoria delle probabilità ⁴⁾.

§ 15. Il prodotto $z\beta$ e la somma $z + \beta$ di due giudizi, sono, per la loro definizione, nuovi giudizi, che si diranno composti dai giudizi z e β , che si considerano semplici. Lo stesso dicasi dei prodotti e somme di più di due giudizi, ed in generale di funzioni di giudizi.

I giudizi composti della forma: $z\beta\gamma\dots$ si dicono

1) BOOLE *op. cit.* p. 163 « To investigate the nature of connexion of secondary Propositions (sc. proposizioni ipotetiche) with the idea of time... »

If the proposition X is true, the proposition Y is true »: An undoubted meaning of this proposition is, that the time in which the proposition X is true, is time in which the proposition Y is true (coexistence).

2) PIERCE *op. cit.* p. 18 la chiama « state of things in which the proposition... is true ».

3) PEANO *op. cit.* p. 7-9.

4) Vedi § 33, osservazione.

coniuntivi ¹⁾ quelli della forma $\alpha + \beta + \gamma \dots$ *disgiuntivi* ²⁾, quelli della forma $\alpha (\beta + \gamma)$, *misti*.

Un giudizio congiuntivo, cioè un prodotto di giudizi, $\alpha, \beta, \gamma \dots$ può anche dirsi sistema di più giudizi, $\alpha, \beta, \gamma \dots$ simultanei: mentre un giudizio disgiuntivo, cioè una somma di giudizi, $\alpha + \beta + \gamma \dots$ può anche dirsi sistema di giudizi alternativi; riservando il nome di sistema di giudizi disgiunti al caso in cui tutti i giudizi $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sono a due a due nella III relazione. Ogni giudizio composto può ridursi ad una somma disgiunta in cui ogni singolo addendo è un giudizio congiuntivo (*vedi esercizi*).

In questi giudizi composti, i giudizi semplici rimangono inalterati come elementi.

Alcune volte in luogo di un giudizio composto di più giudizi può sostituirsi un giudizio elementare di concetti composti: questo giudizio si dirà fuso o composto per fusione dal sistema dei giudizi dati.

Così scrivendo in luogo della forma abbreviata α l'intero giudizio $a < b$; in luogo di β , $c < d$ ecc.; dai giudizi simultanei o congiuntivi

$$\alpha\beta = (a < b) (c < d)$$

otteniamo, moltiplicando o sommando membro a membro (« überschiebend ») le due disuguaglianze a destra, le nuove relazioni fuse:

.....

1) e 2) I nomi greci συμπεπληγμένον e διεξευγμένον derivano dagli stoici e furono volti in latino coi vocaboli « conunctum » « copulativum » e « disinnctum », però essi si riferiscono piuttosto ai giudizi congiuntivi e disgiuntivi in senso stretto, di cui si dirà più innanzi.

$$(1) ac < bd$$

$$\text{ed} \quad (2) (a + c) < (b + d)$$

e quindi per un teorema noto (cioè: $ab \leq a + b$, es. al § 8), anche

$$(3) ac < (b + d).$$

Invece nel giudizio disgiuntivo (in senso lato: cioè alternativo)

$$\alpha + \beta = (a < b) + (c < d),$$

non possiamo eseguire le operazioni membro a membro, non valendo (generalmente) le due relazioni simultaneamente. Possiamo invece asserire che vale il giudizio fuso:

$$(3) ac < b + d.$$

Bisogna osservare che il giudizio fuso è (in generale) sovraordinato, non identico al giudizio composto da cui derivò, cioè:

$$[(a < b) (c < d)] < [ac < bd], \quad [(a < b) (c < d)] < [(a + c) < (b + d)], \quad [(a < b) (c < d)] < [ac < (b + d)], \quad [(a < b) + (c < d)] < [ac < (b + d)].$$

Di questi teoremi si darà la dimostrazione negli *esercizî*.

Di speciale importanza sono i giudizi fusi risultanti da giudizi che hanno eguale soggetto od eguale predicato; così che, per il teorema $aa = a + a = a$ — si ottengono le forme:

$$(1) a < b + d,$$

$$(2) a + c < b,$$

$$(3) a < b + d,$$

$$(4) ac < b;$$

Tutte derivabili da due giudizi simultanei, ove sia rispettivamente $a = c$ — in (1) e (3) — e $b = d$ — in (2) e (4) —. Da due giudizi alternativi o disgiunti non può derivarsi che la (3), che perciò si dice giudizio alternativo o disgiuntivo in senso stretto, e si legge

$$(3) a \text{ è o } b \text{ ovvero } d »;$$

p. es. « Pietro è in casa o fuori ».

Se la disgiunzione è perfetta, allora i giudizi alternativi originari saranno fra di loro incompatibili, cioè sarà

$$(a < b) (a < d) = 0$$

ciò che vuol dire che uno, ma non più, di essi sarà vero; l'altro (o gli altri) falso.

Due giudizi disgiunti che hanno eguale predicato, non possono fondersi in uno — che dovrebbe avere la forma (4) — perchè, se la disgiunzione è perfetta, il prodotto ac suole svanire. Pertanto volendo significare che

$$« \text{ o } a \text{ oppure } c \text{ è } b »$$

ma non tutt'e due assieme, si dovrà scrivere il giudizio composto

$$(a < b) + (c < b).$$

Le forme (1) e (2) si dicono giudizi congiuntivi in senso stretto e si leggono:

(1) « a è b e d » « L'antica Roma era grande e potente ».

(2) « a e c sono b » « Gli arabi e i persiani sono mussulmani ».

La forma (3) e la (4), dedotte da un sistema congiuntivo (cioè non disgiunto!) — possono ritenersi come giudizi congiuntivi, ma più deboli dei corrispondenti (1) e (2)

(3) « a è b oppure d » « L'antica Roma era grande e potente ».

(4) « a che è c , e b » « Gli arabi persiani sono mussulmani ».

(Si noti che « grande » e « potente » non s'escludono, e che v'hanno « arabi residenti in Persia! »).

S'osservi che

$$[(a < b) (a < d)] = [a < bd] < [a < (b + d)]$$

$$[(a < d) (c < d)] = [(a + c) < d] < [ac < d]$$

mentre è sempre

$$[(a < b) + (a < d)] < [a < (b + d)].$$

Veggansi gli esercizi.

Quando valgono simultaneamente i due giudizi

$$a < b + d$$

e

$$b + d < a$$

si ha l'identità

$$a = b + d$$

che si dice *giudizio divisivo*: P. es. « Stati d'animo piacevoli o dolorosi si dicono sentimenti » (e viceversa « i sentimenti sono stati d'animo piacevoli o dolorosi »).

Quando valgono simultaneamente i giudizi

$$a < bd$$

e

$$bd < a$$

si ottiene l'identità

$$a = bd$$

che si dice *giudizio definitivo o definitorio*. P. es. « Il ghiaccio è acqua solidificata ». (« L'acqua solidificata è ghiaccio »).

Su questi giudizi si ritornerà al § 28.

In modo analogo a questo si definiscono i giudizi congiuntivi e disgiuntivi, definitivi e divisivi per più di due concetti per addendi o fattori nel soggetto o nel predicato.

I giudizi ipotetici, come abbiamo veduto al § 14, non sono veramente giudizi composti, ma relazioni di giudizi semplici, e possono darsi relazioni di II grado rispetto ai concetti. Similmente possono darsi relazioni

di III, IV.... n^{mo} grado, quando soggetto e predicato sieno rispettivamente relazioni di II, III.... $(n-1)^{\text{mo}}$ grado. P. es.

$$[a < b] < [(c < d)] < [(e < f) < (g < h)]$$

sarebbe una relazione del 3.^o ordine, equivalente a « se è vero il giudizio ipotetico $(a < b) < (c < d)$ è vero il giudizio ipotetico $(e < f) < (g < h)$ ».

Ad esempio: « Supposto che, se i poligoni regolari, hanno un egual numero di lati, essi sieno fra di loro simili; allora, supposto che i cerchi sieno poligoni regolari, aventi un egual numero di lati, anche i cerchi sone figure simili » (LINDNER). E così via.

Distinguendo i casi in cui le singole proposizioni sono della forma a, e, i, o ; i giudizi ipotetici offrono già sedici varietà cioè, scrivendo una dopo l'altra la forma del precedente $(a < b)$ e del conseguente $(c < d)$, si danno i casi:

$aa,$	$ae,$	$ai,$	ao
$ea,$	$ee,$	$ei,$	eo
$ia,$	$ie,$	$ii,$	io
$oa,$	$oe,$	$oi,$	$oo.$ 1)

1) Di questi casi si occuparono di già gli stoici, i quali distinsero le quattro forme

- se è vero $(a < b)$ è vero $(c < d)$
- se è falso $(a < b)$ è falso $(c < d)$
- se è vero $(a < b)$ è falso $(c < d)$
- se è falso $(a < b)$ è vero $(c < d)$

SENT. EMP. *pyrrhon*, *hyp.* II, 105), che corrisponderebbero ai casi aa, oo, ae, oi ; e BOEZIO (*de syl. hypothetico*).

Per le relazioni di grado superiore tale varietà è più grande, ad esempio, per le relazioni del terzo ordine il numero delle forme è già di 256 ¹⁾.

§ 16. Ogni giudizio

$$a < b$$

può ridursi alla forma

$$(1) \frac{ab}{1} = 0$$

— basta all'uopo moltiplicare la diseguaglianza data per $\frac{b}{1}$, per cui s'ottiene

$$\frac{ab}{1} < \frac{bb}{1}$$

cioè

$$\frac{ab}{1} < 0;$$

donde, essendo per la definizione dello 0,

$$\frac{ab}{1} \geq 0$$

si ricava la forma voluta —.

Medesimamente per la definizione dello 0, la negazione del giudizio $a < b$, ossia

.....

1) Veggansi gli *esercizi*.

$$(1) \quad ab = 0$$

è

$$(2) \quad ab > 0;$$

Se ab_1 non è eguale a 0, dovrà essere maggiore. Dato il concetto ab_1 non vi sono che le due forme possibili di giudizi esistenziali ¹⁾: ab_1 esiste oppure non esiste. Così dato il concetto *uomo* (a) e *non-mortale* (b_1), o non si daranno *uomini immortali*, ed allora tutti gli *uomini* saranno *mortali*; oppure uomini immortali vi saranno ed il giudizio « *tutti gli uomini sono mortali* » sarà falso.

Scambiando a con a_1 e b con b_1 avremo i seguenti otto giudizi elementari semplici, dei quali quattro della forma (1):

$ab = 0$ ossia $a < b_1$: « tutti gli a sono b_1 » (a) o « nessun a è b » (e)

$ab_1 = 0$ ossia $a < b$: « tutti gli a sono b » (a) o « nessun a è b_1 » (e)

$a_1b = 0$ ossia $a_1 < b_1$: « tutti gli a_1 sono b_1 » (a) o « nessun a_1 è b » (e).

$a_1b_1 = 0$ ossia $a_1 < b$: « tutti gli a_1 sono b » (a) o « nessun a_1 è b_1 » (e)

che diconsi giudizi universali e quattro della forma (2):

$ab > 0$ « sonvi alcuni a che sono b » (i)

$ab_1 > 0$ « sonvi alcuni a che sono b_1 » (i) oppure « alcuni a non sono b » (o)

1) Cfr. § 11 oss.

$a_1 b > 0$ « sonvi alcuni a_1 che sono b » (i)

$a_1 b_1 > 0$ « sonvi alcuni a_1 che sono b_1 (i) oppure « alcuni a_1 non sono b (o) »

che diconsi giudizi particolari.

Giova notare che se i giudizi universali così definiti con la forma (1), corrispondono pienamente ai giudizi universali (positivi e negativi secondo il predicato) a ed e già definiti; esprimendo l'equazione

$$ab = 0$$

la disgiunzione tra a e b , cioè il giudizio $a < b_1$ (e per a e b ; a per a e b_1), la definizione del giudizio particolare dato dalla forma (2)

$$ab > 0$$

non coincide con quella di prima

$$va < b, \text{ 4) }$$

(per la quale li avevamo denominati i ed o). Difatti la forma (2), consistendo nella negazione della 1), dice in primo luogo che tanto a che b sono diversi da zero — mentre nella 1) potevano anche uno o tutt'e due svanire — in secondo luogo nega che a e b sieno in terza relazione:

« sonvi alcuni a che sono b »

per tanto può darsi il caso che tra a e b interceda la (1) o la (2) relazione

« alcuni forse tutti gli a sono b ».

1) Cfr. § 12 oss.

ora il giudizio

$$va < b$$

non fa alcuna supposizione circa l'esistenza reale di a e di b ; ed asserisce che a è in (2) relazione con b

« alcuni, ma non tutti gli a sono b ».

Però sebbene con le forme 1) e 2) si esaurisca la varietà possibile dei giudizi, e quindi come osserva il CAYLEY ¹⁾, la distinzione sia certamente completa essendo le due forme fra loro contraddittorie, giova non pertanto mantenere ancora la forma $va < b$, specialmente quando questi « alcuni a » sono un concetto determinato, per sostenere l'edificio della logica tradizionale. Altrimenti adottando esclusivamente la definizione data dalla forma (2), bisogna dare eccessiva importanza alla *suppositio realis* ed abbattere tutta la dottrina delle conversioni, riducendole solamente alla *conversio simplex* ²⁾ (cfr. § 19).

Del resto i giudizi particolari delle forme

$$va < b$$

rientrano nel caso dei giudizi universali della forma (1), potendosi scrivere

$$va_1 = 0;$$

ma in allora la relazione non è più elementare semplice, ma bensì elementare fra le tre quantità a , b , v , delle quali l'ultima è, in massima, indeterminata.

Analogamente un giudizio elementare fra più con-

1) A. CAYLEY, *Note on the calculus of logic*. Quart. Journal of pure and applied mathematics vol. XI p. 282.

2) SCHÜDBER *op. cit.* vol. II. I. parte p. 217.

cetti $a, b, c \dots n$ che, esprimendo una relazione fra i medesimi, avrà la forma

$$f(a, b, c \dots n) < \varphi(a, b, c \dots n)$$

potrà ridursi alla forma

$$f(a, b, c \dots n) \varphi(a, b, c \dots n) = 0$$

moltiplicando la disuguaglianza, membro a membro, per la negazione della funzione $\varphi(a, b, c \dots n)$ e ponendo

$$f(a, b, c \dots n) \varphi(a, b, c \dots n) = F(a, b, c \dots n)$$

si potrà scrivere

$$F(a, b, c \dots n) = 0$$

Un giudizio di tal forma si dirà giudizio elementare universale. La negazione della relazione espressa, cioè un giudizio della forma

$$F(a, b, c \dots n) > 0,$$

si dirà giudizio elementare particolare.

Si domanda quanti e quali giudizi elementari si possono enunciare con n concetti dati, $a, b, c \dots n$?

questo problema è stato proposto dal sig. JEVONS ¹⁾ e da lui risolto per i casi $n = 1, 2, 3$, il sig. CLIFFORD ²⁾ considerò il caso $n = 4$ ed è sì può dire il problema fondamentale della logica.

Potendosi $F(a, b, c, \dots, n)$, funzione dei soli argomenti a, b, c, \dots, n , ridurre ad una somma disgiunta

$$\Sigma (a, b, c, \dots, n),$$

ove ognuna delle lettere a, b, c, \dots, n può essere ovvero no fornita del segno della negazione ³⁾, tutti i giudizi elementari possibili con gli n concetti dati avranno la forma

$$\Sigma (a, b, c, \dots, n) = 0$$

oppure

$$\Sigma (a, b, c, \dots, n) > 0.$$

Per tanto vi saranno tanti giudizi elementari universali e tanti giudizi elementari particolari quante diverse somme disgiunte si daranno. Esse constano di addendi della forma

$$a, b, c, d, \dots, n$$

1) Proc. of the Manchester phil. Soc. vol. VI p. 65-68, Mem. III Série, vol. V p. 119-130 *the Principles of Science* vol. I. p. 151-161 *Studies in deductive logic*, p. 286-289.

2) Proc. of the Manchester phil. Soc. vol. XVII p. 88-101.

3) Vedi gli esercizi 10 e 11.

che si dicono prodotti elementari od elementi. E poichè ognuna delle n lettere (argomenti) può essere fornita del segno della negazione o no, si danno 2^n di tali elementi diversi.

P. es. per $n = 2$ se ne danno $2^2 = 4$, che sono

$$ab, ab_1, a_1b, a_1b_1$$

per $n = 3$, $2^3 = 8$, cioè

$$abc, abc_1, ab_1c, a_1bc, ab_1c_1, a_1b_1c, a_1b_1c_1$$

e così via.

Nelle somme Σ , possono adunque entrare gli addendi in un numero inferiore o al più eguale a 2^n , onde possiamo distinguere, per n concetti, 2^n specie diverse di somme a seconda che constano di 1, 2, 3... 2^n elementi, e corrispondentemente 2^n specie diverse di giudizi (particolari od universali) che si chiamano giudizi a 1, 2, 3... 2^n *rilevi*, ¹⁾ intendendosi per rilievo il prendere in considerazione, il rilevare un elemento cioè il porlo nella somma Σ .

Così p. es. dati due concetti a, b , nella somma

$$\Sigma ab$$

potremo avere sino quattro rilievi:

$$ab \geq 0 \text{ sarebbe un giudizio ad un rilievo}$$

.....
 1) Ted. « Ansehungen »; ingl. « simple, two-fold, three-fold... n fold statement ».

$$ab + ab_1 \geq 0 \quad \text{a due rilievi}$$

$$ab_1 + a_1b + a_1b_1 \geq 0 \quad \text{a tre } \dots \text{ ecc.}$$

Con tre concetti a, b, c possiamo avere fino otto rilievi:

$$abc_1 + a_1b_1c + ab_1c + a_1b_1c_1 + ab_1c_1 > 0$$

sarebbe p. es. un giudizio particolare a cinque rilievi; ecc.

Potendo ciascuno dei 2^n elementi comparire o no nella somma, si danno in tutto 2^{2^n} somme possibili. Con r rilievi vi sono $\frac{2^n (2^n - 1) (2^n - 2) \dots (2^n - r + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$

somme possibili, corrispondenti alle combinazioni di 2^n elementi, presi r alla volta.

Naturalmente è

$$\sum \frac{2^n (2^n - 1) (2^n - 2) \dots (2^n - r + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} = 2^{2^n}$$

$$r = 1$$

Come si sa anche per un noto teorema d'analisi.

Adunque con n concetti si potranno enunziare 2^{2^n} giudizi elementari universali e 2^{2^n} giudizi elementari particolari.

Per $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ questo numero è rispettivamente eguale a 4, 16, 256, 65536 \dots

Ma di questi giudizi non son tutti fra di loro essenzialmente diversi: essendovi un numero molto più limitato di giudizi tipici o tipi ai quali possono essere ricondotti.

Se in un giudizio poniamo una lettera in luogo dell'altra (e quindi la sua negazione in luogo della negazione dell'altra) e viceversa; p. es. se invece di a poniamo b (e quindi in luogo di a_1 , b_1) ed invece di b (o b_1) poniamo a (od a_1), si dice d'aver fatto uno scambio. Con questo la forma del giudizio rimane inalterata, potendosi intendere con a e b concetti qualsivoglia.

Lo scambio di a con b si denota con $\binom{a}{b}$. Ad esempio il giudizio a 5 rilievi sovraccennato diventa per questo scambio

$$\begin{array}{ccccccc} bac & + & b a c & + & ba c & + & b a c & + & ba c & > & 0 \\ 1 & & 1 1 & & 1 & & 1 1 1 & & 1 1 \end{array}$$

oppure, ordinando le lettere

$$\begin{array}{ccccccc} abc & + & a b c & + & a bc & + & a b c & + & a bc & > & 0. \\ 1 & & 1 1 & & 1 & & 1 1 1 & & 1 1 \end{array}$$

Si dimostra facilmente che

$$\binom{a}{b} = \binom{b}{a} = \binom{b_1}{a_1} = \binom{a_1}{b_1}$$

Così pure è uno scambio

$$\begin{pmatrix} a \\ a_1 \end{pmatrix},$$

quando in luogo d'una quantità si pone la sua negazione e viceversa.

Inoltre è pure

$$\begin{pmatrix} a \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ a \end{pmatrix};$$

ecc.

Tutti i giudizi che si possono derivare da un giudizio dato mediante scambi, si dicono rappresentanti del tipo del giudizio dato.

Perciò due giudizi saranno del medesimo tipo quando con un certo numero di scambi potranno rendersi identici.

Naturalmente è necessario all'uopo che abbiano egual numero di rilievi e che sieno tutt'e due universali o tutt'e due particolari.

$$\text{P. es.} \quad \begin{matrix} ab & + & ab & = & 0 \\ & & 1 & & \end{matrix} \text{ ed } \begin{matrix} a & b & + & a & b & = & 0 \\ & 1 & & 1 & & 1 & 1 \end{matrix}$$

sono dello stesso tipo, potendosi ricondurre il secondo al primo mediante il semplice scambio $\begin{pmatrix} a \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Non si poté ancora scoprire in generale quanti e quali sieno i tipi dei giudizi che si possono enunciare con n concetti nè trovare il numero dei rappresen-

tanti pertinenti ad ogni singolo tipo: finora è riuscito solamente il calcolo per $n = 1, 2, 3, 4$ ¹⁾.

Per $n = 2$, date i concetti a e b , le 16 differenti somme sono

0, a nessun rilievo

$ab, ab, a b, a b$, ad un rilievo
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$ab + ab, ab + a b, ab + a b$,
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$ab + a b, ab + a b$,
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$a b + a b$, a due rilievi
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$ab + ab + a b, ab + ab + a b$,
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$ab + a b + a b, ab + a b + a b$, a tre rilievi
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$ab + ab + a b + a b$, a quattro rilievi.
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

Le somme a 0, 1, 3, 4 rilievi sono rispettivamente del medesimo tipo, quelle a 2 rilievi hanno due tipi; dell'uno è rappresentante

1) La soluzione del problema per 1, 2, 3 concetti, data dal Jevons, fu corretta e completata da Miss LADD *Studies in logic* by members of the Johns Hopkins University, Boston, Little Brown, 1883 p. 67-68. Cfr. SCHÖDER *op. cit.* vol. I p. 616-617, vol. II p. XII. CLIFFORD (l. c.) calcolò il numero dei tipi per il caso $n = 4$ — in una mia prossima pubblicazione mi occuperò del calcolo del numero dei rappresentanti per costesti tipi, e li enumérerò. La medesima pubblicazione tratterà inoltre del principio dello studio del caso $n = 5$; ed alcuni teoremi fondamentali per la risoluzione del caso n in generale.

$$ab + \frac{ab}{1}$$

dell'altro

$$ab + \frac{a}{1} \frac{b}{1}$$

Abbiamo adunque, per due concetti, sei specie diverse di somme, che eguagliate a zero danno sei specie di giudizi universali e poste maggiori di zero, danno sei specie di giudizi particolari. I tipi delle somme sono:

I (a zero rilievi) 0

II (ad un rilievo) ab

III (a due rilievi, 1. tipo) $ab + \frac{ab}{1} (= a)$

IV (a due rilievi, 2. tipo) $ab + \frac{a}{1} \frac{b}{1}$

V (a tre rilievi) $ab + \frac{ab}{1} + \frac{a}{1} \frac{b}{1} (= a + b)$

VI (a quattro rilievi) $ab + \frac{ab}{1} + \frac{a}{1} \frac{b}{1} + \frac{a}{1} \frac{b}{1} (= 1).$

Le corrispondenti specie di giudizi sono:

Universali	Particolari
I $0 = 0$ (principio d'identità cfr. § 23).	$0 > 0$ (giudizio assurdo, cfr. § 23).
II $ab = 0$ (« tutti gli a sono b » giudizio universale).	$ab > 0$ (« alcuni a sono b » giudizio particolare).
III $a = 0$ (« non vi è a » giudizio esistenziale negativo).	$a > 0$ (« vi è a » giudizio esistenziale affermativo).

IV $ab + a \cdot b = 0$ (« a è b » e viceversa, giudizio equi- pollente, cfr. esercizi).	$ab + a_1 b_1 > 0$ (« a non è eguale a b » negazione dell'equi- pollenza).
V $a + b = 0$ (« non vi è né a né b » giudizio congiuntivo esistenziale, cfr. esercizi).	$a + b > 0$ (« vi è o a o b forse tutt'e due » giudizio alternativo esistenziale).
VI $1 = 0$ (giudizio assurdo).	$1 > 0$ (principio di contrad- dizione, cfr. § 23).

Un giudizio elementare della forma

$$\Sigma (abcd...) = 0 \text{ oppure } \Sigma (abc...) > 0$$

può scriversi semplicemente

$$\Sigma_k A = 0 \text{ oppure } \Sigma_k A > 0,$$

significando con A ($k = 1, 2, \dots, m$) i prodotti elementari o co-
stituenti; ed in virtù del teorema esposto all'esercizio 22), vedi
anche esercizi a codesto § 16 — si riduce alla forma:

$$\Pi (\Lambda = 0)_k \text{ oppure } \Sigma (\Lambda > 0)_k,$$

In fine ponendo

$$[\Lambda = 0]_k = x'_k$$

e la sua negazione

$$[\Lambda > 0]_k = x_k,$$

1) Giudizi primitivi oppure giudizi di DE MORGAN (SCHEMATA).

si hanno le due forme

$$\Pi z_k \quad \text{e} \quad \Sigma z_k',$$

che rappresentano rispettivamente un giudizio elementare come prodotto o come somma dei giudizi elementari ad un rilievo, z_k .

Combinando addittivamente, moltiplicativamente od in tutt'e due i modi più giudizi elementari, avremo un sistema alterno, congiunto o misto di relazioni logiche, ossia un giudizio composto.

Essendo ogni singolo giudizio elementare una funzione (prodotto o somma) dei giudizi elementari ad un rilievo (o monomi) z_k (ed z_k'), un giudizio composto dovrà pure essere funzione di codesti giudizi e pertanto si potrà porre nella forma

$$F(z_k).$$

Sviluppando la $F(z_k)$ in somma disgiunta, ogni giudizio composto avrà la forma

$$\Sigma (z_1 z_2 \dots z_m).$$

ove gli z_k ($k = 1, 2, \dots, m$) possono o no avere l'accento della negazione. Vi saranno dunque 2^m di tali prodotti della forma

$z, z, \dots, z^{(1)}$); Ed il numero di tutti i diversi giudizi composti
 $1, 2, \dots, m$
 possibili sarà dato dal numero di tutte le somme possibili con
 questi 2^m prodotti. Questo numero è, per un ragionamento ana-
 logo ad un precedente, 2^m . Ricordandosi ora che per n con-
 cetti il numero m degli A , cioè dei costituenti possibili, è eguale
 a 2^n ;

Il numero complessivo di tutti i giudizi che si pos-
 sono enunciare con n concetti è eguale a

$$2^{2^n}$$

(Questo numero fu scoperto dal Prof. Giuseppe PEANO ²⁾, però
 escludendo il giudizio assurdo

$$1 = 0.$$

l'identità

$$0 = 0$$

.....

1) Ciascuno di questi prodotti rappresenta una determinata posizione dei
 concetti a, b, c, d, \dots , cioè un sistema di relazioni fisse tra i medesimi: e ve ne
 sono di tanti tipi e rappresentanti, quanti tipi e rappresentanti hanno i giudizi
 elementari coi medesimi concetti a, b, c, d, \dots ; facendo corrispondere, poniamo,
 un rilievo dell'addendo A , alla negazione del relativo giudizio primitivo α ,
 cioè alla posizione α_k — anzi che α — nel prodotto.

Di ciò tratto nel lavoro, di prossima pubblicazione, citato a pag. 96, nota.

2) Cfr. PEANO, *Calcolo geometrico*, Torino, Boecca 1888 p. X.

ed una serie di giudizi superflui ripetuti o derivati da altri), il numero viene ridotto a

$$\frac{\binom{2^0}{2} - 1}{2} = 2.$$

Così per $n = 1$, si hanno $2^{\binom{2}{2} - 1} - 2 = 2^3 - 2 = 6$ giudizi

$$1) (x_1); a = 0 \quad 2) (x'_1); a > 0$$

$$3) (x_2); a = 0 \text{ oppure } a = 1 \quad 4) (x'_2); a > 0 \text{ oppure } a < 1$$

$$5) (x'_1 x'_2); (a > 0) (a > 0) \text{ oppure } 0 < a < 1$$

$$6) (x_1 + x_2); (a = 0) + (a = 0) \text{ oppure } (a = 0) + (a = 1) \\ [a \text{ è } 0 \text{ od } 1].$$

Restando esclusi il giudizio identico (1), l'assurdo (0), e i giudizi superflui $(x_1 x'_1)$, $(x'_1 x_1)$, $(x_1 x_2)$, $(x_2 x_1)$, $(x'_1 + x'_2)$, $(x'_2 + x'_1)$, $(x'_1 + x'_2)$, $(x_1 x_2 + x'_1 x'_2)$, $(x_2 x_1 + x'_1 x'_2)$, che darebbero assieme ai precedenti un numero di giudizi eguale a 16 ($= 2^{2^2}$).

Per $n = 2$ il numero dei giudizi possibili è 32766; per $n = 3, 4, \dots$ la cifra cresce rapidissimamente. ¹⁾ Vi è naturalmente un numero molto più limitato di tipi (o giudizi tipici).

1) Cfr. SCHÖPFER *op. cit.* vol. II parte 1. p. 168-179.

ai quali molti giudizi possono essere ricondotti mediante la sostituzione dei simboli letterali dei concetti; Ma il problema di stabilire quanti e quali tipi di giudizi composti possano darsi con n concetti è più difficile di quello di stabilire i tipi dei soli giudizi elementari, che fu già accennato; e non fu ancor risolto ¹⁾.

Si può osservare, che quanto fu detto per le relazioni dei concetti vale per le relazioni dei giudizi, bastando interpretare le lettere a, b, c, \dots come giudizi, e quindi le $\alpha \alpha_1 \alpha_2, \dots$ come giudizi ipotetici. Anzi in generale rappresentando con a, b, c una qualunque quantità logica, cioè una relazione di grado qualunque (cfr. § 13), la dottrina ora esposta si applica alle relazioni fra queste quantità logiche, e le lettere $\alpha \alpha_1 \alpha_2, \dots$ esprimono le relazioni del grado prossimo superiore.

Esercizi e problemi.

Al § 12. — 43) Dare esempi di giudizi universali e di giudizi particolari;

44) di giudizi affermativi e di giudizi negativi. — Distinguerli inoltre per la quantità in a, e, i, o .

45) Si indichi la quantità, la qualità, e la modalità (in senso kantiano) dei seguenti giudizi:

« Ogni corpo è pesante », « ogni corpo può essere pesato », « ogni corpo deve occupare uno spazio », « è possibile che Nettuno sia abitato » (LANDNER).

« alcuni nomini sono felici » « alcuni cibi non devono mangiarsi nei giorni di astinenza » « nessun triangolo ha due angoli non minori di un retto ».

Al § 13. — 46) Dare esempi di giudizi che stanno in I relazione.

1) Il problema fu indicato da Cristina LADD. *Studies in logic by members of the Johns Hopkins University*, Boston, Little Brown & C. p. 1888 p. 67.

- 47) In II relazione.
 48) In III relazione.
 49) 1. Che relazioni intercedono fra le seguenti coppie di giudizi:

« L'acqua gela »; « Il termometro è sopra zero » — « Il triangolo è scaleno »; « il triangolo è ottusangolo » — « L'acqua è un elemento »; « L'acqua consta di ossigeno ed idrogeno » — « I vizi sono riprovevoli »; « La superbia è riprovevole » — « Il cielo è sereno »; « Il barometro è alto » — « La stufa è accesa »; « La stanza è calda » — « Il dieci è numero pari »; « Il dieci è divisibile per due » — « V'è plenilunio »; « S'eclissa il sole » — « Il triangolo è equilatero »; « Il triangolo è equiangolo » —

II. Esempi di relazioni tratti dal BAIX: Forma $(a < b) < (c < d)$: « Se il tempo è bello, noi andremo in campagna », « Se ella subì il contagio, morrà ». Forma $(a < b) = (c < d)$: « Se una certa quantità di forza fu spesa, una quantità equivalente si sviluppò ». Forma $(a < b) < (c < d)$: Se il soccorso non viene, la città si renderà ». Forma $(a < b) < (c < d)$: « Se il porto è gelato, bastimenti non possono entrare ». Forma $(a < b) < (c < d)$: « Se non v'è Dio, non v'è vita futura ». — LAXDER: Forma $v(a < b) < (c < d)$: « Alle volte se l'uomo fa del bene, viene ricompensato ». Forma: $v(a < b) < (c < d)$: Alle volte se il genio scopre nuove teorie non viene perseguitato ».

- 51) Dare esempi di somme e di prodotti di giudizi.
 52) Formare la negazione dei giudizi dati ai numeri 43), 44) e 45).

53) Ridurre a subordinazioni di giudizi i giudizi ipotetici dei numeri 47) 48) e 49).

54) Dare esempi di contenuti e di sfere di dati giudizi. — Analogamente a quanto fu detto per i concetti si può dare una definizione rigorosa del contenuto e della sfera di un dato giudizio nel modo seguente:

Dal sistema di relazioni:

$$x < \beta_1$$

$$x < \beta_i$$

$$x < \beta_2$$

$$x < \beta_i$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x < \beta_n$$

$$x < \beta_i$$

si deduce: Contenuto di $x = \prod_{k=1}^n \beta_i$ Sfera di $\beta = \sum_{k=1}^m x_i$.

Al § 45. — 55). Dare esempi di giudizi congiuntivi e alternativi e misti, cioè delle forme $x \beta \gamma \dots$, $x + \beta + \gamma \dots$, $x(\beta + \gamma) \dots$, [Delle prime due forme sono già gli esempi del n. 51)].

56) Formare la negazione degli esempi del n. precedente.

Si osservi che la negazione di un giudizio alternativo è un giudizio congiuntivo e viceversa. Si dimostri che in generale è:

$$(\Sigma x)_1 = \Pi (x)_1$$

$$(\Pi x)_1 = \Sigma (x)_1$$

57). Un giudizio composto coi giudizi $x, \beta, \gamma \dots$ può dirsi funzione di questi e scriversi

$$F(x, \beta, \gamma \dots).$$

Si dimostri che tale funzione è sviluppabile per gli argomenti $x, \beta, \gamma \dots$ e che si hanno in generale le formule:

$$F(x \dots) = F(1 \dots) x + F(0 \dots) x_1$$

$$F(x\beta\gamma) = F(11\dots) x\beta + F(10\dots) x\beta + F(01\dots) x\beta + \\ F(00\dots) x\beta.$$

[cfr. esercizio n. 39].

58) Un giudizio composto solamente dai giudizi $x\beta\gamma\dots\nu$, avrà la forma

$$F(x\beta\gamma\dots\nu) = \Sigma(x\beta\gamma\dots\nu)$$

dove ciascuna delle lettere $x\beta\gamma\dots\nu$ sotto il segno della somma potrà avere o no il segno della negazione. [cfr. es. 40].

L'espressione $\Sigma(x\beta\gamma\dots\nu)$ si dice somma disgiunta. Gli addendi, cioè i fattori della forma $(x\beta\gamma\dots\nu)$, possono essere in un numero non maggiore di 2^n indicando con n il numero dei giudizi dati $x\beta\dots$.

[cfr. § 16].

59). Coll'aiuto dei seguenti teoremi:

$$I\dots (a < b) = (ab = 0) \text{ [§ 16].}$$

$$II\dots (x = 0) (y = 0) = (x + y = 0) \text{ [es. 22]}$$

$$III\dots (x = 0) (y = 0) < (xy = 0) \text{ [per il II ed il IV]}$$

$$(x = 0) + (y = 0) < (xy = 0) \text{ [bastando che uno dei fattori svanisca perchè } xy \text{ sia eguale a zero].}$$

$$IV\dots x + y \geq xy \text{ [es. 14].}$$

si dimostrano facilmente le proprietà dei giudizi fusi congiuntivi e alternativi, riportate nel testo:

$$(1) (a < b) (c < d) < (ac < b + d); \text{ infatti } (a < b) (c < d) \\ = (ab = 0) (cd = 0) (I)$$

$$< \begin{matrix} (ab & cd = 0) \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad (\text{III})$$

$$< \begin{matrix} (ac & (b + d) = 0) \\ 1 \end{matrix} \quad (\text{es. } 23)$$

$$< [ac < b + d] \quad (1)$$

$$(2) (a < b) + (c < d) < (ac < b + d). \text{ In modo analogo.}$$

$$(3) (a < b) (a < d) = \begin{matrix} (ab = 0) \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} (ad = 0) \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} (ab + ad \\ 1 \quad 1 \end{matrix}$$

$$= 0) = [a (b d) = 0] = a < bd. \quad (\text{IV}).$$

$$< (a < b + d).$$

$$(4) (a < b) (c < b) = \begin{matrix} (ab + cb = 0) \\ 1 \quad 1 \end{matrix} = [(a + c) b = 0] \quad 1$$

$$= a + c < b, \quad (\text{IV});$$

$$< (ac < b)$$

$$(5) [(a < b) + (a < d)] < (a < b + c) \quad [\text{dalla } (2)]$$

$$(6) [(a < b) + (c < b)] < (ac < b) \quad [\text{dalla } (2)].$$

60) Si diano esempi pratici, colla relativa rappresentazione grafica, delle formule dimostrate al numero precedente.

61) Tradurre in formole i seguenti giudizi composti: *Aggregati*:

« Tanto se il sole risplende nella stanza, come se si riscalda la stufa, si tempera l'aria della stanza ». « Tanto facendo il male, quanto tralasciando di fare il bene, non si adempie al proprio dovere ». « Se uno è moderato nel godimento dei piaceri,

non adempie soltanto ad un dovere morale, ma conserva in sé anche la suscettibilità per piaceri ulteriori ». « Se nel triangolo si traccia dal vertice dell'angolo retto una perpendicolare all'ipotenusa, si ottengono due triangoli simili al grande ed anche simili tra loro ». — « Se vi è tanto un oggetto visibile quanto un occhio sano, quanta luce, vi si può vedere ». « Se disposizioni naturali si incontrano con un'accurata, ragionevole educazione e con buona fortuna: l'uomo può divenir grande ». « Se due rette sono tracciate nello stesso piano e non s'incontrano: esse sono parallele ». — « Se vi è una ricompensa, essa deve aver luogo in questa vita o nell'altra ». « Se un cono viene tagliato da un piano, la superficie che così si ottiene è o un cerchio o un'elisse o un'iperbole o una parabola ». (LINDNER). « Se vi sono animali o piante, vi devono essere germi persistenti ». (BAIX).

Fusi. « Un battello può essere un battello a vela, o un battello a remi o un battello a vapore ». « Il metallo di che si fanno le monete è oro, od argento, o rame, o bronzo, o nichelio » (JEVONS). « Tanto i cattolici, quanto i Protestanti, gli Anglicani ed i Greci sono cristiani ». « Dio è benigno e giusto ». « Fede, speranza e carità sono virtù teologali ». « Magnetismo ed elettricità hanno tanto forza attrattiva, quanto repulsiva ». « Tanto l'avaro che lo scialacquatore non sono da lodarsi né da imitarsi ». « Questo paese è un continente o un'isola ». « Questo corpo è o solido o liquido o fluido o aeriforme ». — Gli occhi vedono in modo normale o miope o presbite ». « Le macchine a vapore sono o fisse o locomotive o locomobili » (LINDNER). I sentimenti sono o piacevoli o dolorosi ». « Egli non può o non vuole farlo ». (BAIX).

62) Nel tradurre una proposizione espressa con parole in simboli logici bisogna badare all'interpretazione esatta delle congiunzioni « e » « tanto » « quanto » « o » ecc. affine di rendere esattamente la relazione pensata. P. es. la congiunzione « e » nel soggetto, per lo più deve significarsi col segno + « e » nel predicato col segno X. Così la proposizione « militari (a) e soci (b) sono invitati (c) » si scrive

$$a + b < c$$

Invece « Pietro (l) è buono (m) e diligente (n) »

$$l < m n$$

* Nella battaglia di Austerlitz Russi (a) ed Austriaci (b) furono vinti (c) e disfatti (d) »

$$a + b < cd.$$

Si ricorra alla rappresentazione grafica.

La formula $ab < c$ bisogna tradurla col dire gli a , che sono anche b , sono c : I maggiorenni che sanno leggere (a) e scrivere (b), hanno diritto al voto (c).

Così pure bisogna distinguere accuratamente le proposizioni disgiuntive da quelle semplicemente alternative.

La proposizione

$$(1) (a < b) + (a < c)$$

è disgiuntiva quando vi s'aggiunge la condizione

$$(2) (a < b) (a < c) = 0.$$

P. es. « Pietro è a casa o all'ufficio »: ma non può essere in tutt'e due i luoghi. La congiunzione « o » corrisponde all'« aut » latino. Sviluppando il giudizio composto (1) in somma disgiunta si ha

$$(a < b) + (a < c) = (a < b) (a < c)_1 + (a < b)_1 (a < c)$$

$$+ (a < b) (a < c) = (a < b) (a < c)_1 + (a < b)_1 (a < c)$$

sparendo l'ultimo addendo per la (2). Quindi equivale al dire « o Pietro è a casa e non è all'ufficio oppure è all'ufficio e non è a casa. »

Se non vale la condizione (2) il giudizio è semplicemente alternativo; la congiunzione « o » significa allora « vel ». Così p. es. dicendo « si emerge nella società per nobiltà o per censo » si ammettono tre casi o che uno emerga per sola nobiltà, o per solo censo o per tutt'e due.

Al § 16. 63). Dare esenqni di tutti i giudizi elementari possibili con due concetti a e b .

1°. es. posto $a =$ « bianco », $b =$ « dolce », i quattro giudizi universali e rispettivamente i quattro giudizi particolari monomi, cioè ad un rilievo, sono:

(Tipo $ab = o$)

(1) « Non vi sono cose bianche e dolci » oppure « il bianco non è dolce ».

(2) « Non vi sono cose bianche e non-dolci » « il bianco è dolce ».

(3) « Non vi sono cose non-bianche e dolci »; « una cosa non bianca non è dolce ».

(4) « Non vi sono cose non-bianche e non-dolci » « ciò che non è bianco, è dolce ».

(Tipo $ab > o$)

(1) « Vi sono cose bianche e dolci » oppure « almeno di bianco è dolce ».

(2) « Vi sono cose bianche e non dolci »; « almeno di bianco non è dolce ».

(3) « Vi sono cose bianche e dolci »; « alcune cose che non sono bianche sono dolci ».

(4) « Vi sono cose non-bianche e non-dolci » « alcune cose non-bianche, non sono dolci ».

I quattro giudizi universali ed i quattro particolari, a due rilievi, tipo I, sono:

(Tipo $a = o$)

(1) « Non vi son cose bianche ».

(2) « Non vi sono cose dolci ».

(3) Non vi sono cose non-bianche ».

(4) « Non vi son cose non-dolci ».

(Tipo $a > o$)

(1) « Vi son cose bianche ».

(2) « Vi son cose dolci ».

(3) « Vi son cose non-bianche ».

(4) « Vi son cose non-dolci ».

I due giudizi universali, e i due particolari, a due rilievi, tipo II, sono:

(Tipo $a = b$)	[Tipo $(a = b)_I$]
(1) « Ciò che è bianco è dolce e vice versa ».	(1) « Il bianco non è eguale al dolce, e viceversa ».
(2) « Ciò che è bianco è non-dolce, e viceversa ».	(2) « Il bianco non è eguale al non-dolce, e viceversa ».

ecc.

64). Per due concetti, il numero dei giudizi rappresentanti i vari tipi — che, appare, surrogano l'antica distinzione dei giudizi nelle forme a , e , i ed o — si rileva dal seguente prospetto:

numero dei rilievi	0	1	2	3	4	somma
numero dei tipi	1	1	2	1	1	6
numero dei rappresentanti	1	4	4 + 2	4	1	16

Per tre concetti abbiamo $2^3 = 256$ rappresentanti compresi in 22 tipi e distribuiti come segue:

numero dei rilievi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	somma
numero dei tipi	1	1	3	3	6	3	3	1	4	22
num. dei rappresentanti	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

65). Per riconoscere il tipo a cui appartiene un dato giudizio bisogna ridurlo alla forma normale indicata al § 16. All' uopo si richiedono due operazioni: 1. Ridurlo alla forma

$$f \geq 0$$

cio che si ottiene moltiplicando il membro a sinistra del segno $<$, (a), per la negazione del membro a destra (b). P. es.

$$ab + a \underset{1}{(b + c)} < (b + c) \underset{1}{(a + b)}$$

si riduce a

$$[ab + a \underset{1}{(b + c)}] \underset{1}{(b + c + ab)} = 0.$$

11. Esprimere il membro a sinistra in somma disgiunta (cfr. es. 41).

66). Si dia a talento una qualunque relazione e la si rechi in forma normale

$$\Sigma (abc...) \geq 0.$$

67). Quali sono i giudizi composti possibili coi due giudizi

$$x = \text{« piove »}$$

$$y = \text{« lo stato barometrico è alto »?}$$

68). Il teorema

$$(a + b = 0) = (a = b) (b = 0). \text{ Cfr. es. 22,}$$

generalizzato, dà

$$[(\sum_k a) = o] = \Pi_k (a = o);$$

e negandolo:

$$[(\sum_k a) > o] = \sum_k (a > o).$$

Per il teorema medesimo è:

$$\begin{aligned} (ab + a \underset{1}{b} = o) &= [(ab = o) (a \underset{1}{b} = o)] \\ &= [(a < \underset{1}{b}) (b < \underset{1}{a})] = (a = \underset{1}{b}); \end{aligned}$$

ecc.

CAP. IV

Dottrina del sillogismo

§ 17. Definizione — § 18. Distinzioni del sillogismo

§ 19. Trasformazione e risoluzione delle relazioni elementari (inversioni, sillogismi immediati)

§ 20. Eliminazioni delle relazioni elementari (sillogismi mediati). Le figure sillogistiche

§ 21. Trasformazione, risoluzione ed eliminazioni delle relazioni composte (sillogismi composti)

§ 17. Il sillogismo ¹⁾ - in senso lato - è il procedimento col quale da date relazioni logiche se ne ricavano delle altre. Le relazioni date si chiamano *premesse* ²⁾.

1) Raziocinio, ragionamento; Lat. « ratiocinatio », « collectio » « conclusio ». Greco συλλογισμός. Ted. « Schlussfolgerung ».

2) Grec. προτάσεις. Lat. « praemissae » « enunciationes ».

le ricavate *conclusioni* 1). P. es. nei sillogismi: « Tutti i triangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza; dunque i triangoli rettangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza »; « I pianeti hanno moto rotatorio; Marte è un pianeta; dunque *Marte* ha un moto rotatorio » le proposizioni « tutti i triangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza » e « I pianeti hanno moto rotatorio », « Marte è un pianeta » sono le premesse; le proposizioni: « I triangoli rettangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza »; « *Marte* ha un moto rotatorio » sono le rispettive conclusioni.

Il procedimento col quale dalle premesse si ricava la conclusione si basa su di un principio assiomatico, detto d'inferenza o di deduzione (Cfr. Capo V § 24) e consiste in operazioni — già da noi studiate — che si eseguono sulle premesse. P. es. per dedurre dalle premesse

(1) « se piove (α), le strade sono bagnate (β) »

(2) « ma le strade non sono bagnate ($\beta = 0$) »

la conclusione

« dunque non piove » ($\alpha = 0$)

si esprime la subordinazione (1) $\alpha < \beta$ nella forma

1) Grec. $\pi\acute{\epsilon}\lambda\lambda\omicron\gamma\iota\varsigma$. Ted. « Schluss ».

$\alpha_1 = \alpha$, quindi moltiplicando la premessa (2) per α ed addendola alla (1) si ottiene

$$\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = 0 \text{ cioè } \alpha (\alpha + \alpha) = \alpha = 0.$$

Chiamiamo giudizio l'espressione di una qualunque relazione logica: sia che essa interceda fra concetti o fra relazioni di concetti, o fra relazioni di relazioni.... (relazioni di un grado qualunque). Quindi possiamo dire che il sillogismo è la deduzione di un giudizio da altri giudizi. Il giudizio dedotto (conclusione) è il risultato di operazioni eseguite sui giudizi dati (premesse).

In questo modo il sillogismo è definito logicamente, col giudizio e quindi col concetto.

Però il sillogismo non si deduce dal giudizio, come il giudizio dal concetto. Il giudizio viene definito come l'espressione delle relazioni tra i concetti e dai concetti si ricava mediante alcuni principi assiomatici (§§ 22, 23). Invece il sillogismo apparisce come il risultato di operazioni eseguite sui giudizi e si ricava da questi aggiungendo agli assiomi già assunti per le formazioni del giudizio, ancora un altro, cioè quello dell'infirmità.

I segni $>$, $<$, $=$, \dots che esprimono relazioni fra quantità logiche in generale, producono *giudizi*; i segni $+$, \times , $-$, che significano relazioni, producono quantità composte e sillogismi. Si vede che così è terminata la serie delle forme elementari, perchè all'infuori di quantità logiche considerate per sé (concetti), relazioni od operazioni di queste quantità, altro la nostra mente non può logicamente pensare.

Quelle logiche che partono dal sillogismo e che quindi non hanno ancora definito il giudizio ed il concetto, devono darne una definizione non logica: P. es. il JEVONS, definita la logica come scienza del ragionare ¹⁾ chiama sillogismo (raziocinio) quella forma di discorso con la quale ragioniamo ²⁾, e così si appoggia al linguaggio. Il GALLUPP, avendo definita la logica come la scienza del raziocinio, spiega questo come un procedimento del nostro pensiero, come un fatto psicologico, che poi

1) JEVONS, *Logica*, trad. Di Giorgio, Milano, Hoepli, 1878 p. 3.

2) *Ibid.*, p. 8.

decompone ne' suoi elementi ¹⁾. Il PEIRCE ²⁾ dà pure una definizione psicologica.

§ 18. Distinguiamo i sillogismi anzitutto in categorici od ipotetici, a seconda che le premesse sono relazioni di concetti (relazioni di primo grado o giudizi nello stretto senso della parola) oppure relazioni di relazioni (relazioni di 2. grado, giudizi ipotetici oppure relazioni di grado superiore). Così il sillogismo: « Tutte le piante sono organismi; l'alga è una pianta, dunque l'alga è un organismo » è categorico: invece il sillogismo: « Se divido un parallelogrammo con una diagonale, i due triangoli che ne risultano hanno i lati rispettivamente eguali. Se due triangoli hanno i lati rispettivamente eguali, i due triangoli sono fra di loro eguali; quindi se divido un parallelogrammo con una diagonale, i due triangoli che ne risultano sono fra di loro eguali » è un sillogismo ipotetico.

A seconda che le premesse sono relazioni elementari (semplici o multiple) o composte (di forma congiuntiva disgiuntiva o mista), i sillogismi si diranno elementari (semplici o multipli) o composti (di forma congiuntiva, disgiuntiva o mista).

Del sillogismo ipotetico si parlerà al § 19, del composto al § 20. Intanto si osservi che perché un sillogismo si dica categorico od elementare bisogna che tutte le premesse sieno rispettivamente relazioni di 1. grado, e, rispettivamente, relazioni elementari. Perché si dica ipotetico, di grado m , o composto basta che una sola premessa sia una relazione di grado m , oppure una relazione composta.

1) GAUPEL, *Elementi di filosofia*, Milano, Silvestri, 1861, vol. I, p. 10, 13.

2) PEIRCE, *On the algebra of logic* (Am. Jour. of Math., vol. III) p. 16.

I sillogismi che hanno una sola premessa si dicono immediati e quelli che ne hanno più si dicono mediati. P. es. il sillogismo « La superficie d'ogni triangolo è misurata dalla base moltiplicata per l'altezza, dunque la superficie del triangolo rettangolo è misurata dalla base moltiplicata per l'altezza » oppure quest'altro « nessun uomo è immortale e perciò tutti gli uomini devono morire » sono sillogismi immediati; mentre tutti quelli citati più su sono mediati.

L'operazioni che si eseguono delle premesse per ricavare la conclusione possono essere naturalmente svariatissime. Le classificheremo nei tre gruppi principali, che seguono:

I. *Trasformazioni* delle relazioni date in altre relazioni equivalenti. In questo caso la conclusione esprime, in altra forma, le stesse relazioni che sono espresse dalle premesse. Così p. es. il giudizio

$$x = 0$$

si trasforma, formando un sillogismo immediato in quest'altro,

$$\frac{x}{1} = 1$$

[s'intende sempre che in queste trasformazioni non avvengano i casi contemplati *sub* II o III, cioè risoluzioni od eliminazioni].

II. *Risoluzioni* delle relazioni. In questo caso le premesse sono relazioni, poniamo fra n quantità e la con-

elusione esprime la relazione di una di codeste quantità con le $n - 1$ rimanenti; cioè è la risoluzione di tutto il sistema di premesse, per questa quantità, che apparisce sola in un membro della conclusione (per lo più nel primo, come soggetto).

P. es. la inversione (cfr. § 19, II) del giudizio

$$a < b_1$$

— che funge da unica premessa — nel nuovo giudizio (conclusione)

$$b < a_1.$$

III. *Eliminazione* di quantità. In questo caso dalle premesse che esprimono relazioni fra n quantità logiche, si ricava, come conclusione, una nuova relazione fra $n - m$ quantità, eliminandone m . — Le quantità eliminate si chiamano termini medi. La conclusione dicesi anche risultato dell'eliminazione o risultante delle premesse.

P. es. essendo $n = 3$, $m = 1$, e due il numero delle premesse, il sillogismo ottenuto mediante l'eliminazione del termine medio, è il solito sillogismo categorico aristotelico. Le due quantità ($n - m = 3 - 1 = 2$) che compariscono nella conclusione si dicono termine maggiore e termine minore (cfr. § 20).

Combinando questi singoli procedimenti, or enunciati, con le distinzioni dei sillogismi fatte prima, otterremo

diverse specie di sillogismi che saranno oggetto di studio nei §§ seguenti.

§ 19. Ogni relazione elementare può trasformarsi in infiniti modi in altri equivalenti; difatti I) una relazione

$$\Sigma(abc\dots) \underset{=}{\geq} 0$$

negando membro a membro — e quindi scambiando i segni $\underset{=}{\leq}$ in $\underset{=}{\geq}$ — diventa

$$[\Sigma(abc\dots)]_1 \underset{=}{\leq} 1.$$

La negazione della somma disgiunta Σ è, per l'es. 41, II, una nuova somma disgiunta, che denotiamo con Σ' ; Pertanto avremo la relazione data trasformata nella seguente

$$\Sigma'(abc\dots) \underset{=}{\leq} 1,$$

che sarà un nuovo giudizio equivalente al primo.

P. es. dal giudizio « tutti i cattolici (a) sono cristiani (b) », cioè

$$ab \underset{1}{=} 0,$$

si deduce

$$ab + \underset{1}{a} \underset{1}{b} + \underset{1}{a} \underset{1}{b} = 1, \quad ,$$

cioè « ognuno è o cristiano cattolico, o cristiano acattolico oppure nè cristiano nè cattolico ».

II. Moltiplicando entrambi i membri per una medesima quantità; oppure aggiungendo una medesima quantità ad entrambi, otterremo una nuova relazione equivalente. Difatti se ho

$$a < b,$$

il sistema congiuntivo

$$(a < b) (c = c) < (ac < bc)$$

$$(a < b) (c = c) < (a + c < b + c)$$

— cfr. es. 59 — mi esprime la possibilità di dette trasformazioni.

In forza di questo teorema possiamo ridurre anche i giudizi particolari sotto la forma di giudizi universali. Difatti il giudizio particolare

$$\Sigma (abc...) > 0$$

potrà scriversi

$$\Sigma (abc...) = R$$

ove R è una quantità non evanescente, cioè che è sempre > 0 (quantità *reale*). Moltiplicando l'equazione per $\frac{1}{R}$, si ha

$$\frac{1}{R} \Sigma (abc...) = 0$$

ove $R =$ essendo negazione di $R =$ è una quantità che non può essere tutto il pensabile, ma è sempre < 1 (quantità *parziale*) ¹⁾.

Adunque ogni giudizio può trasformarsi in un'equazione avente il membro a destra eguale a zero, colla differenza che nel membro a sinistra souvi ovvero no quantità parziali, a seconda che la relazione è particolare od universale.

Però tale trasformazione, benchè teoreticamente importante, non ha grande utilità nella pratica, perchè il membro a sinistra non è più funzione delle sole quantità date a b c ..., ma ancora delle quantità parziali indeterminate.

Ogni giudizio $a < b$ può ridursi alla forma evanescente (§ 16)

$$ab = 0$$

e viceversa:

$$(ab = 0) = (a < b).$$

Ora, essendo pel principio commutativo

$$ab = ba,$$

sarà anche

$$ba = 0$$

e quindi

$$b < a.$$

Perciò:

Da ogni giudizio $(a < b)$ si può dedurre un altro

1) Cfr. PIERCE, *op. cit.* p. 30. — VOIGT, *op. cit.* p. 23 segg.

ponendo in luogo d'ognuno dei termini la negazione dell'altro ($b < a$). Questa trasformazione si chiama *contrapposizione* ¹⁾.

Per questa regola

$$a < b \text{ si converte in } b < a.$$

$$va < b \quad \text{e} \quad vb < a \quad (\text{da } vab = vb a = o),$$

$$va < b \quad \text{e} \quad vb < a.$$

Quindi i giudizi a ed i diventano rispettivamente e ed o ; i giudizi e ed o rimangono tali. —

Ridotto il giudizio $a < b$ alla forma

$$ab = o$$

combinandolo coll'identità

$$v = v$$

avremo

$$(ab = o) (v = v) < (vab = o)$$

1) *Contrapositio*. Greco: ἀντιστρέψαι (GALENO. — Cfr. PRANTL. *op. cit.* vol. I. p. 568).

$$< (va < b)_1.$$

Quindi:

Da ogni giudizio universale $(a < b)_1$ si può dedurre un giudizio particolare $(va < b)_1$ rendendo particolare il soggetto (cioè ponendo va in luogo di a). Questa trasformazione si chiama *subalternazione* ¹⁾.

Così si ha dal giudizio $a < b$ il particolare: $va < b$.

Quindi dai giudizi a ed e si deducono, giudizi i ed o .

Il giudizio particolare dedotto è della forma $va < b$; per averlo nella forma $ab > 0$ bisogna aggiungere la condizione $a > 0$.

Diffatti, ricorrendo all'identità

$$a = ab + ab_1$$

se vale il giudizio $a < b$, il secondo addendo a destra $(ab)_1$ svanisce, e pertanto rimane

$$a = ab$$

e sarà $ab > 0$ quando $a > 0$;
e si ha dunque l'alternativa

$$(a < b) = [(a = 0) + (ab > 0)]^2).$$

1) Cfr. §§ 13, 14.

2) Cfr. PEIRCE *op. cit.* p. 18. SCHROEDER *op. cit.* vol. II, parte I, p. 243, 244.

Per principio commutativo essendo

$$ab = ba,$$

il giudizio particolare della forma

$$ab > 0$$

può anche scriversi

$$ba > 0.$$

Cioè « vi sono alcuni a che sono b » diventa « vi sono alcuni b che sono a ».

Quindi:

Da un giudizio particolare (nella forma non evanescente) si deduce un altro giudizio particolare scambiando il soggetto col predicato. Questa trasformazione si dice *conversione pura*. ¹⁾

Analogamente i giudizi

$$\underset{1}{ab} > 0, \quad \underset{1}{a} \underset{1}{b} > 0, \quad \underset{1}{a} \underset{1}{b} > 0$$

1) *Conversio simplex*: Greco, ἀναστρέψειν. (GALENO). ARISTOTELE usa il vocabolo ἀντιστρέψειν per l'inversione in generale: Così dice negli *Anal. pr. I*, τήν μὲν ἐν τῷ ὑπάρχειν καθόλου στεργητικὴν ἀνάγκη τοῖς ὅροις ἀντρίψειν, οἷον εἰ μηδεμία ἡδονὴ ἀγαθόν, οὐδ' ἀγαθόν οὐδὲν ἐστὶ ἡδονή (contrapposizione del giudizio a), τήν δὲ κατηγορικὴν ἀντιστρέψειν μὲν ἀναγκαῖον, οὐ μὴν καθόλου ἀλλ' ἐν μέρει (conversio per accidens) . . . τῶν δὲ ἐν μέρει τήν μὲν καταφατικὴν ἀντιστρέψειν ἀνάγκη κατὰ μέρος (conversio simplex).

PSELLO ha le specificazioni ἀντιστροφὴ ἀπλή = conversio simplex, ἀντιστροφὴ κατὰ συμβεβηκός = c. per accidens, ἀντιστροφὴ κατ' ἀντίθεσιν = contrapositio.

diventano rispettivamente, per conversione pura;

$$\frac{b}{1} a > 0, \quad \frac{ba}{1} > 0, \quad \frac{b^{-1}a}{1} > 0.$$

La conversione pura dei giudizi particolari della forma

$$va < b, \quad va < \frac{b}{1}$$

presenta invece alcune difficoltà.

Convertendo il giudizio *i*

« alcuni *a* sono *b* »

nell'altro

« alcuni *b* sono *a* »

si ha l'espressione « *alcuni b* » che non significa più « *alcuni ma non tutti* » come per gli « *alcuni a* » ($va < a$); quindi non si ha un giudizio *i* della medesima forma di prima. Diffatti, se posso dedurre dal giudizio

$$va < b$$

la equazione

$$va = wb$$

e quindi invertendo

$$wb = va$$

od, a fortiori,

$$wb < a;$$

Quest'ultimo giudizio, risultato dalla conversione, ha per soggetto il wb , che non era astretto alla condizione di essere $wb < b$, e poteva benissimo essere $= b$. Laonde l'« *alcuni* » del giudizio convertito non significa « non tutti » come 'nel giudizio dato.

Il giudizio o :

$$wa < \underset{1}{b}$$

si converte (con la medesima osservazione per il w) nel giudizio particolare

$$wb < \underset{1}{a}$$

che però non può ritenersi per un giudizio o , e quindi non va confuso col giudizio

$$wb < \underset{1}{a}.$$

Dal giudizio o :

$$\text{« alcuni } a \text{ non sono } b \text{ »}$$

si deduce il giudizio

$$\text{« alcuni non } b \text{ sono } a \text{ »}$$

che è ben diverso dal giudizio (o)

$$\text{« alcuni } b \text{ non sono } a \text{ »}$$

che a prima vista sembrerebbe potersi ottenere per la conversione dei termini. — Qui bisogna stare attenti al significato del negativo (cfr. § 8 p. 69). Il giudizio che può dedursi, della forma

$$wb < \underset{1}{a}$$

è uno dei quattro giudizi introdotti da DE MORGAN (cfr. § 8 p. 65 ¹⁾).

Riducendo un giudizio universale

$$a < b$$

alla forma

$$va < b$$

mediante subalternazione, e quindi, per conversione pura, in

$$wb < a,$$

si trasforma il giudizio

« tutti gli *a* sono *b* »

in quest'altro

« alcuni *b* sono *a* »

[si osservi qui pure il significato indeterminato del vocabolo *alcuni*].

Pertanto:

Da un giudizio universale ($a < b$) si può dedurre un giudizio particolare ($wb < a$) invertendo il giudi-

1) Molti autori non hanno esplicitamente constatato questo fatto. È curioso il modo come ne tratta il LEXNER, il quale ammette la conversione pura pel modo *a* [op. cit. p. 63: « Se consideriamo i risultati dell'inversione dei giudizi A, E, I, O secondo le due regole susposte (per I, O soltanto la prima che suona: « il giudizio può invertirsi rendendo però particolare il predicato p. 62 »).....] e nel dare gli esempi lo converte giustamente nel giudizio di MORGAN: « Alcune verità non sono provate. Alcuni teoremi non provati sono verità » [l. c. cfr. anche p. 66, lo schema 22].

zio dato e rendendo particolare il predicato (b). Questa trasformazione dicesi *conversione impura* 1)

In modo simile da

$$a < \underset{1}{b} \quad a < \underset{1}{b}, \quad a < \underset{1}{b}$$

si deducono rispettivamente i giudizi

$$\underset{1}{wb} < a \quad \underset{1}{wb} < \underset{1}{a} \quad \underset{1}{wb} < \underset{1}{a}$$

Si ripeta l'osservazione precedente.

Per ottenere dal giudizio universale ($a < b$) un giudizio particolare della forma non evanescente ($ba > o$), per conversione impura, bisogna aggiungere la condizione che il soggetto dato sia reale ($a > o$). Allora

$$(a < b), (a > o) < (ab = o) \quad (ab + \underset{1}{ab} > o) < (ba > o);$$

analogamente

$$(a < \underset{1}{b}) (a > o) < (\underset{1}{b} a > o)$$

$$(\underset{1}{a} < b) (\underset{1}{a} > o) < (ba \underset{1}{> o})$$

$$(\underset{1}{a} < \underset{1}{b}) (\underset{1}{a} > \underset{1}{o}) < (\underset{1}{b} \underset{1}{a} > \underset{1}{o}).$$

La conversione e la contrapposizione chiamansi anche inversioni dei giudizi.

Il problema più generale dell'inversione consiste nella risoluzione di un sistema di giudizi fra n concetti,

1) *Conversio per accidens*. Greco ἀναστρέψαιν κατὰ μέρος.

per un concetto. In tal modo il concetto scelto apparirà come soggetto di un nuovo giudizio nel quale si contiene una relazione esplicita fra esso e gli altri $n - 1$ concetti. Questo problema non fu ancor risoluto in generale ¹⁾.

Se il sistema di giudizi è simultaneo ed i giudizi sono universali — oppure anche particolari della forma $va < b$ — la risoluzione per un concetto x si trova facilmente.

Diffatti tutto il sistema può ridursi ad una unica equazione della forma:

$$f(x) = 0$$

(Cfr. es. al § 16).

Sviluppando $f(x)$ per x si ha

$$f(1) x + f(0) x = 0 \quad (\text{cfr. es. al § 10}),$$

donde si ricava l'equazione

$$x = f(0) \cdot u + f(1) \cdot u \quad (\text{vedi esercizi}),$$

dove u è un concetto arbitrario che può variare da 0 ad 1: e questa equazione è la risoluzione per x del sistema dato, cioè la inversione del sistema medesimo ²⁾.

§ 20. Chiamando conclusione il giudizio ottenuto mediante una delle trasformazioni studiate al § pre-

1) Cfr. SCHNÖDER *op. cit.* vol. II Parte I. p. 215, 216, p. 371-400 — VOIGT *op. cit.* §§ 13, 23, 31.

2) Cfr. SCHNÖDER *op. cit.* vol. I p. 416-477. — La risoluzione d'una equazione è quella funzione dei coefficienti dell'equazione, tale che sostituita per x nella equazione stessa dà per risultato la *risultante* (dell'eliminazione) — di cui si dirà a § 21 —... (VOIGT p. 17).

cedente, con quanto si disse si studiarono i sillogismi immediati.

Ora si passa a studiare i sillogismi mediati, cioè quelli nei quali la conclusione viene ricavata dai giudizi dati mediante l'eliminazione dei termini medi. Il caso più semplice del sillogismo mediato è quello che consta di due premesse e di tre termini, uno il soggetto (*a*, termine minore), il secondo (*b*, termine maggiore) il predicato della conclusione, il terzo (*x*, termine medio) il concetto che si elimina e che quindi compare solo nelle premesse; e le premesse sono giudizi elementari semplici. La premessa che contiene il termine medio ed il maggiore dicesi premessa maggiore, la premessa che contiene il termine medio ed il minore dicesi premessa minore. Questo è il sillogismo tradizionale aristotelico ed ha la forma:

premessa maggiore . . . (*b*, *x*)

» minore (*a*, *x*)

conclusione

(*a*, *b*).

A seconda che il termine medio funge da soggetto o da predicato nelle singole premesse, abbiamo le seguenti quattro combinazioni, che si dicono 1^a, 2^a, 3^a e 4^a figura sillogistica: ¹⁾

1) I vocaboli tecnici greci sono $\pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$ (*propositio*), $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\eta\mu\epsilon\lambda\alpha$ (*hypothesis*), $\mu\epsilon\gamma\epsilon\lambda\lambda\eta\sigma\iota\varsigma$ (*a. ampl.*) = premessa minore, $\sigma\mu\epsilon\lambda\lambda\eta\sigma\iota\varsigma$ (*a. ampl.*) = premessa maggiore, $\sigma\mu\epsilon\lambda\lambda\eta\sigma\iota\varsigma$ (*a. ampl.*) = premessa minore, $\sigma\mu\epsilon\lambda\lambda\eta\sigma\iota\varsigma$ (*a. ampl.*) = premessa maggiore.

$\frac{a}{1} (x) < \frac{b}{1} (h)$	$\frac{a}{1} (h) < \frac{b}{1} (x)$	$\frac{a}{1} (x) < \frac{b}{1} (h)$	$\frac{a}{1} (h) < \frac{b}{1} (x)$
$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h)$	$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (x)$	$\frac{a}{2} (x) < \frac{b}{2} (a)$	$\frac{a}{2} (x) < \frac{b}{2} (a)$
$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h)$	$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h)$	$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h)$	$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h)$

Ciascuna premessa può inoltre essere uno dei quattro giudizi *a* e *i* ed *o*; pertanto avremo, per ogni figura, sedici combinazioni di premesse, che si dicono *modi*, ¹⁾ cioè:

Modo	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Premessa maggiore...	a	a	a	a	o	e	e	e	i	i	i	i	o	o	o	o
» minore.....	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o

In tutto saranno 64 di tali modi ($= 4 \times 16$). Però non da tutti, eliminando la *x*, si ha come conclusione una relazione tra *a* e *b*, cioè un giudizio della forma richiesta:

$$\frac{a}{2} (a) < \frac{b}{2} (h),$$

poichè in molti la eliminazione dà per risultato la identità $0 = 0$, oppure un giudizio esistenziale, $a > 0$.

minore). E dalla posizione, ritenuta fondamentale della prima figura il termine maggiore è quello ἐν ᾧ ἄλλος ἐστίν, il minore ἐν ᾧ ἄλλος ἐστίν. La « figura » si disse ὁμοῦ.

1) πρότερον.

$b > 0$ ecc.: in questo caso i modi furono considerati come non valevoli ¹⁾. Così si esclusero:

1.) Tutti i modi con entrambe le premesse negative [cioè i modi: 6.^a, 8.^a, 14.^a, 16.^a; quindi quattro per ogni figura, 16 in tutto];

2.) I modi con entrambe le premesse particolari [cioè: 11.^a, 12.^a, 15.^a (il 16.^a è già escluso); 12 modi in tutto]. — Resterebbero per ciascuna figura 9 modi, ma si esclusero ancora:

3.) I modi della prima figura con la premessa maggiore particolare [9.^a, 10.^a, 13.^a] oppure con premessa minore negativa [2.^a, 4.^a; dunque 5 modi].

4.) I modi della seconda figura con entrambe le premesse positive [1.^a, 3.^a, 9.^a] o con premessa maggiore particolare [10.^a, 13.^a; 5 in tutto].

5.) I modi della terza figura con premessa minore negativa [2.^a, 4.^a, 10.^a].

6.) I modi 3.^a, 4.^a, 10.^a, 13.^a della quarta figura ²⁾.

1) Non si deve quindi ritenere che vi sieno casi in cui non vi sia conclusione. Alla peggio questa conclusione sarà un'identità e perciò non si avrà una nuova verità dalle premesse. Cfr. SCHÜBNER op. cit. vol. II, parte I, p. 361.

2) Queste regole sono contenute nei seguenti versi memoriali

Utrique si praemissae negat, nihil inde sequetur.

Nil sequitur genericis ex particularibus unquam.

Sit minor affirmans nec maior sit specialis (per la I figura)

Una negatus esto nec maior sit specialis (per la II figura).

Sit minor affirmans, conclusio sit specialis (per la III figura).

Nel resto queste regole, in unione a quelle relative alla conclusione - che dicono essere necessario e sufficiente che una delle premesse sia negativa affinché la conclusione sia tale; e sufficiente che una sia particolare perchè sia tale la conclusione - furono variamente derivate e compendiate nei vari trattati. DEVOSS op. cit. p. 63-78, LAPP op. cit. p. II, VOGEL op. cit. p. 37 ecc.

Per verificare che questi modi non dăuno una conclusione della forma desiderata, si può trovare di fatto la risultante dal sistema delle premesse col procedimento che s'insegna al § 21; oppure si può, per il momento, accontentarsi della illustrazione grafica: cioè, rappresentando coi simboli euleriani le posizioni reciproche di a , b , x come vengono date dalle premesse, si rileva che la posizione di a in rispetto a b non può essere fissata; e quindi non si può stabilire il giudizio esprimente la loro relazione.

Nella prima figura restano adunque le seguenti quattro combinazioni possibili di premesse:

$$1^a) \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 2^a) \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad 3^a) \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 4^a) \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline i \\ \hline \end{array}.$$

Dal 1° modo si ricava una conclusione a . Diffatti essendo le due premesse

$$x < b \quad e \quad a < x;$$

che si possono anche scrivere

$$\frac{xb}{1} = 0$$

$$\frac{ax}{1} = 0,$$

moltiplicando la prima per a e la seconda per b ₁ ed addendo si ha

$$\frac{abx}{1} + \frac{abx}{1} = 0 \text{ cioè}$$

$$ab - x - x = 0$$

quindi

$$ab = 0$$

oppure

$$a < b$$

c. v. d. 1)

Con la sostituzione di b per b si ottiene il sillogismo

$$x < b$$

$$a < x$$

$$a < b$$

cioè una conclusione e dal 3°) modo.

Ponendo ea per a si ottiene dal 1°) modo, il modo 2°) con una conclusione i :

Il Più semplicemente, per quanto si dirà al § 21, si ottiene la conclusione, ricavando la risultante totale delle due premesse sommate:

$$b - x + ax = 0$$

che suona appunto:

$$b - a = 0.$$

$$a < b$$

$$va < x$$

$$va < b;$$

è dal 3° modo il modo 4° con una conclusione *a*:

$$x < b$$

$$va < x$$

$$va < b.$$

Adunque nei quattro modi possibili, la premessa maggiore, minore e la conclusione sono rispettivamente giudizi rappresentati dalle seguenti lettere

aaa, aii, eae, eio

che si trovano nelle parole memoriali:

Barbara, Darii, Celarent, Ferio.

P. es. « Tutti i corpi celesti che girano intorno al sole appartengono al nostro sistema planetario; alcune comete girano intorno al sole; dunque alcune comete appartengono al nostro sistema planetario » (*Darii*) ». « Nessun uomo nasce schiavo, i negri sono uomini, dunque nessun negro nasce schiavo (*Celarent*) ».

Trasformando le conclusioni *a* ed *e*, per subalternazione, nei giudizi *i* ed *o* si ottengono due modi: *Bar-*

bari e *Celarent* che sono forme più deboli dei modi da cui si derivarono.

Nella seconda figura restano i modi

$$1^a \begin{vmatrix} a \\ e \end{vmatrix} \quad 2^a \begin{vmatrix} a \\ o \end{vmatrix} \quad 3^a \begin{vmatrix} e \\ a \end{vmatrix} \quad 4^a \begin{vmatrix} e \\ i \end{vmatrix}.$$

Dal 1° modo si ricava una conclusione *e*. Diffatti scrivendo le premesse $b < x$ ed $a < x$ nella forma

$$\underset{1}{bx} = 0$$

$$ax = 0;$$

moltiplicando la prima per a e la seconda per b ed addendo si ottiene

$$\underset{1}{abx} + \underset{1}{abx} = 0$$

cioè

$$ab = 0$$

oppure

$$\underset{1}{a} < \underset{1}{b}$$

c. v. d.

Scambiando x con e si ottiene dal 3° modo pure una conclusione *e*.

$$b < \frac{x}{1}$$

$$a < x$$

$$a < \frac{b}{1}$$

Ponendo va per a , si ottiene dal 1° modo il modo 2° con la conclusione o :

$$b < x$$

$$va < \frac{x}{1}$$

$$va < b$$

e dal 3°, il modo 4°, pure con conclusione o :

$$b < \frac{x}{1}$$

$$va < x$$

$$va < \frac{b}{1}$$

Onde si hanno i modi: a e e (*Camestres*) a o o (*Baroco*) e a e (*Cesare*) e i o (*Festino*).

P. es. « I divertimenti nobili favoriscono la pace dell'animo; i giuochi d'azzardo non favoriscono la pace dell'animo, dunque i giuochi d'azzardo non sono divertimenti nobili. » (*Camestres*).

« La vera arte non è attività meccanica; alcune virtù sono

sono attività meccaniche; alcune virtuosità non sono arte » (*Festino*: 4).

Indebolendo la conclusione *e* in *o*, si hanno le due forme secondarie *Camestres Cesaro*.

I modi della terza figura sono sei:

$$1^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 2^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad 3^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 4^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad 5^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 6^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline o \\ \hline a \\ \hline \end{array}.$$

Dal primo si ricava una conclusione *i*.

Diffatti scrivendo le premesse

$$x < b$$

$$x < a$$

nella forma

$$x = ub$$

$$x = va$$

si ricava

$$va = ub$$

onde

$$va < b.$$

1) LIPSNER *op. cit.* p. 76.

Scambiando b con b_1 si ottiene dal modo 3° una conclusione o .

$$x < b_1$$

$$x < a$$

$$va < b_1$$

Ponendo wx in luogo di x [nella prima o nella seconda premessa] si ottengono dal 1° modo il 2°

$$x < b$$

$$wx < a$$

$$va < b,$$

ed il 5°

$$wx < b$$

$$x < a$$

$$wa < b,$$

Con conclusioni i .

Dal 3° modo, il 4°

$$\begin{array}{r} x < b \\ \quad | \\ \hline \end{array}$$

$$wa < a$$

$$\hline va < b$$

ed il 6°

$$\begin{array}{r} wx < b \\ \quad | \\ \hline \end{array}$$

$$x < a$$

$$\hline va < b, \\ \quad |$$

Con conclusioni o.

Si hanno adunque i modi: a a i (*Darapti*), a i i (*Datisi*), e a o (*Felapton*), e i o (*Perison*), i a i (*Dimitis*), o a o (*Bocardo*).

P. es. « Alcuni nomini contenti sono poveri, i contenti sono da invidiarsi, dunque alcuni poveri sono da invidiarsi (*Datisi*) ».

« Il potassio è un metallo, il potassio galleggia sull'acqua, alcuni metalli galleggiano sull'acqua (*Darapti*) » ¹⁾.

I modi della quarta figura sono cinque:

$$1^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 2^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline e \\ \hline \end{array} \quad 3^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad 4^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad 5^{\circ} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline a \\ \hline \end{array}.$$

1) SCHROEDER *op. cit.* vol. II, parte I, p. 237.

Dal 1° si ha una conclusione *i*.
 diffatti, scambiando le premesse si ha

$$x < a$$

$$b < x.$$

Donde si ricava, secondo il primo modo nella I figura [con la sostituzione di *b* per *a*]:

$$b < a$$

ossia, convertendo:

$$a < b.$$

Analogamente si ottiene una conclusione *e* della 2ª, una *o* della 3ª e dalla 4ª ed una *i* della 5ª combinazione di premesse. Cioè si hanno i modi *a a i* (*Bamalip*), *a e e* (*Calemes*) e *a o* (*Fesapo*) e *i o* (*Fresison*) *i a i* (*Dimatis*).

P. es. « Il pipistrello è un mammifero, nessun mammifero depone uova; un animale che depone uova non può essere un pipistrello » (*Fresison*).

« I sali sono combinazioni chimiche, le combinazioni chimiche si possono decomporre, alcuni corpi che si possono decomporre sono sali ». (*Bamalip*).

Scrivendo in luogo della conclusione *e* nel 2º modo, la conclusione *o* si ha il modo più debole *Calemos*.

Le prime tre figure furono trattate completamente già da ARISTOTELE (*Analyt. pr.* I, 4-7). TEOFRASTO vi aggiunse i modi della quarta figura, considerandoli però come modi indiretti (αζζζ ζνζζλζζζ) della prima figura (*ALEX. ad. anal. pr.* f. 27 b [Brandis, p. 188. 4], BOETHIUS, *de syll. cat.* ed. Basilea 1570

p. 594). Sembra che appena GALENO (AVERROË, Prior. Resol. I, 8; PSEUDO GALEN.) in Εισαγωγή διζήσεων pubbl. dal P. Minoides Minas, Parigi 1811, προσέσκη p. 57) ne abbia formata la quarta figura. Le parole mnemoniche *Barbara, Celarent...* compariscono per la prima volta in alcune versioni e rilacimenti della *συνταξὶς τῆς τῶν Ἀριστοτελικῶν λογικῶν ἐπιστημῶν* di Psello, pubblicate nel XIII secolo (GI. GILIELMO SHYRESWOOD; PIERRO LEXANO; *Summulae* colla variante *Canviesres* in luogo di *Canmestres* e i nomi *Baralipson, Celantes, Dabitis, Fapesmo, Prises* (*o morum* per i modi della quarta figura considerati come indiretti della prima).

I nomi originali greci sono i seguenti:

Γράμματα ἑγρονθεῖ γρονθοῖ τεχνικῶς per la I.

Γράμματα ἑταῖς ἑξήται πᾶσανος ἑρὸν per la IV (I indiretta).

Ἐγρονθεῖ γλῆτ/ε πᾶσαν ἑλῆστο per la II.

Ἄνται τεχνικῶς ἑταῖς ἑταῖς οὐδὲν ἑρὸν per la III.

In OCCAM (*Summa totius logice* c. 3-5) si trovano i modi indeboliti: -- (Cfr. PRANTL, *Geschichte d. Logik*, vol. III c. XIX).

In questi nomi memoriali, oltre le vocali *a e i o*, anche le consonanti *s, p, c, m*, hanno un significato convenzionale: *s* vuol dire conversione pura (simplex), *p* conversione impura (per accidens) e contrapposizione della proposizione rappresentata dalla vocale precedente; *m* trasposizione delle premesse (metathesis). Esegguendo queste trasformazioni i modi delle tre ultime figure diventano modi equivalenti della prima figura, e precisamente si riducono a quel modo che ha eguale consonante iniziale; così *Baroco* si riduce a *Barbara* contrapponendo la seconda premessa. A *Barbara* si riduce pure *Bocardo* e *Bamalip* e così via.

Trattando i giudizi particolari colla formula

$$ab > o,$$

per ottenere la conclusione in quelli ove è necessaria una conversione impura (*p*) od una subalternazione, bisogna aggiungere alle due premesse una terza proposizione, cioè un giudizio esistenziale, che ci abiliti a detta trasformazione (Cfr. § 19) ¹⁾. Così per dedurre la conclusione del modo *Baralip*:

1) Altrimenti la conclusione è $O \equiv O$, ciò che credo, avvertì per primo il PRINCE. Aristotele and De Morgan have particular conclusion from two universal premises; these are all rendered illogical by the signification which I attach to ∞ ... (l. c. p. 22, nota).

$$(1) x < b$$

$$(2) x < a$$

bisogna aggiungere l'altra premessa

$$(3) x > 0.$$

Diffatti appena allora dal prodotto delle prime due:

$$x < ab$$

si ricava, *a fortiori*,

$$ab > 0.$$

P. es. dicendo: « le sirene hanno volti umani », « le sirene abitano nel mare » dunque « alcuni esseri che abitano il mare hanno volti umani » si vede benissimo che, affinché la conclusione fosse vera, bisognerebbe che esistessero le sirene.

I modi *Durapti*, *Felapton*, *Bamalip*, *Fesapo* e tutti i cinque modi indeboliti: *Barbari*, *Celaront*, *Cesaro*, *Camestros*, *Calemos*, hanno bisogno di un tale giudizio esistenziale in aggiunta alle premesse, per cui devono considerarsi come forme di deduzione affatto diverse dagli altri 15 modi, in cui la conclusione è dedotta dalle sole due premesse enunziate; e che quindi soddisfanno strettamente alla definizione del sillogismo aristotelico: ¹⁾.

Ammettendo nelle due premesse, anziché le quattro forme *a* e *i* o, gli otto giudizi (equazioni) di HAMILTON (cfr. § 12, p. 66 nota 1) i numeri dei modi possibili ascende a 36; altre combinazioni si ottengono ponendo le forme di giudizio di DE MOREAN e di HALSRIED (§ 12 *ibid.*). Però con l'annunziare i modi delle figure non si guadagna in fondo un grau che; potendosi molte forme ridurre a pochi tipi con opportune sostituzioni e trasformazioni. Vedemmo come già gli antichi logici cercarono di ri-

1) Δῆλον ἐστὶ καὶ ὅτι πάντα ἀπόδειξις ἔσται... ἐκ δύο προτάσεων καὶ τῆς ἐκείνης. (ARIST. *anapht.* p. 1, 25).

durre i modi delle altre figure a quelli della prima. Una più grande semplificazione fu fatta da Miss Ladd che derivò tutti i 15 modi esatti dal seguente prodotto evanescente:

$$(AB = 0) (B \underset{1}{C} = 0) (AC > 0) = 0,$$

che si deduce dalla relazione

$$\begin{aligned} (AB = 0) (B \underset{1}{C} = 0) &< (ABC = 0) (AB \underset{1}{C} = 0) \\ &< [AC(B + \underset{1}{B}) = 0]; \end{aligned}$$

cioè

$$(AB = 0) (B \underset{1}{C} = 0) < (AC = 0)$$

e riducendo questa subordinazione alla forma evanescente, ricordando che

$$(AC = 0) \underset{1}{=} (AC > 0).$$

Basta all'uopo ridurre questo prodotto ad una subordinazione, portando uno dei fattori — negato — come membro maggiore, a destra, e sostituire opportunamente a , b , x in luogo delle lettere da noi scritte in carattere maiuscolo.

Del resto anche il prof. CAYLEY ¹⁾ ridusse tutti i possibili sistemi di premesse pel sillogismo tradizionale ai seguenti sei:

$$(ax = 0) (xc = 0) \qquad (ax = 0) (x \underset{1}{c} = 0)$$

1) A. CAYLEY. *Note on the calculus of logic*, Quart. Jour. v. XI p. 182.

$$(ax = 0) (xe > 0) \qquad (ax = 0) (x \underset{1}{e} > 0)$$

$$(ax > 0) (xe > 0) \qquad (ax > 0) (x \underset{1}{e} > 0).$$

donde s'imparerà a trarre la conclusione, trattandosi del problema generale dell'eliminazione, al § 21.

I sillogismi ora trattati si chiamano *categorici*, a differenza dei sillogismi *categorico-ipotetici*, nei quali le premesse anzichè relazioni di concetti sono relazioni di giudizi (giudizi ipotetici). Questi sillogismi categorico-ipotetici si distinguono anche nelle medesime figure e nei medesimi modi, di cui si parlò innanzi. Basta porre in luogo dei termini (concetti) a, b, x, le lettere α, β, ξ (esprimenti giudizi). P. es. posto

$$\alpha = A < B$$

$$\beta = C < D$$

$$\xi = M < N$$

lo schema:

$$(M < N) < (C < D) \text{ cioè « quando } M \text{ è } N, C \text{ è } D \text{ »}$$

$$(A < B) < (M < N) \qquad \text{« } \text{ » } \quad A \text{ è } B, M \text{ è } N \text{ »}$$

$$(A < B) < (C < D) \qquad \text{» } \quad A \text{ è } B, C \text{ è } D \text{ »}$$

sarebbe un modo *Barbara*.

$C < D < M < N$ cioè « quando C è D, non è vero che M è N »
₁

$v(A < B) < (M < N)$ « alle volte se A è B, M è N »

$v(A < B) < (C < D)$ « alle volte se A è B, è falso che C è D »
₁

è un *Festino* ecc.

Se nei sillogismi considerati, la premessa minore è un giudizio esistenziale, abbiamo i sillogismi *ipotetici* propriamente detti: P. es.

$z < \tilde{p}$ cioè « se è vero z è vero \tilde{p} »

$z < z$ alle volte z è vero;

$z < \tilde{p}$ alle volte è vero \tilde{p} »

ed anche:

$z < \tilde{p}$ « se è vero z è vero \tilde{p} »

$\tilde{p} < 1$ \tilde{p} non è sempre vero;

$z < 1$ z non è sempre vero » (*Barbara*)

Son più importanti le forme ove la proposizione esistenziale è universale:

$\alpha < \beta$	« se è vero α è vero β »
$1 = \alpha$	« α è (sempre) vero »
<hr/>	
$1 = \beta$	« β è vero » ¹⁾

ed anche:

$\alpha < \beta$	« se vi è α vi è β »
$\beta = 0$	« non vi è β »
<hr/>	
$\alpha = 0$	« non vi è α » ²⁾ (<i>Barbara</i>)

e così per altri modi e figure.

A questa forma ipotetica vengono ricondotti tutti i sillogismi, secondo PERCE ³⁾. Difatti esprimendo con α

1) Questa forma si dice *modo ponente*.
Si noti che la forma simile:

$$\begin{array}{r} \alpha < \beta \\ \beta = 1 \\ \hline \alpha = 1 \end{array}$$

è falsa. Dall'esistenza di una causa si deduce l'esistenza dell'effetto, ma non viceversa: « se piove le strade sono bagnate » e le strade sono bagnate e dunque (?).

2) Questa forma si dice *modo tollente*.
Si noti che la forma

$$\begin{array}{r} \alpha < \beta \\ \alpha = 0 \\ \hline \beta = 0 \end{array}$$

è falsa. È vero invece se $\alpha = \beta$. È così anche la forma della nota precedente.

3) PERCE *op. cit.* p. 19-20.

il sistema delle premesse, con β la conclusione, ogni sillogismo si riduce alla proposizione

$$x < \beta$$

cioè: poste le premesse (x) si deduce la conclusione (β). Però questa proposizione esprime a rigore di termine l'alternativa: o x è falso, e allora non si deduce niente, oppure è vero ed in allora è vera la β :

$$(x < \beta) = (x = 0) + (x > 0) (\beta > 0).$$

Perciò tutti i sillogismi soliti vengono chiamati *dialogismi*, riservando il nome di sillogismo alla conclusione dalle due premesse

$$x < \beta \quad \text{ed} \quad x > \alpha,$$

dove la conclusione $\beta > \alpha$ si deduce senza ambiguità.

Esempi di sillogismi categorico-ipotetici:

Se il testimonio dice la verità, l'imputato si trovava in casa all'ora....;

« Se l'imputato si trovava in casa all'ora..., non si trovava al luogo del delitto » « dunque se il testimonio dice la verità l'imputato non si trovava al posto del delitto » (*Celarent*).

« Se l'acqua è una sostanza semplice essa non è decomponibile; se si può estrarre l'idrogeno dall'acqua, essa è decomponibile; dunque se si può estrarre l'idrogeno dall'acqua, essa non è un corpo semplice. (*Cesare*). » —

ipotesi: « Se v'è destino non v'è provvidenza; or provvidenza v'è, dunque non v'è destino » (*Camestres*). « Dissi che saremmo andati in campagna se il tempo era bello, ora il tempo non era bello, dunque non andammo in campagna » (è vera soltanto se la premessa maggiore è un'identità: cioè qualora il bel tempo fosse condizione *necessaria e sufficiente*. Vedi nota 2 pag. 146 ed esercizi). « Alle volte se è vento forte, il piroscalo non parte;

oggi il piroscallo è partito; dunque forse non era vento forte » (*Baroco*).

Nel ragionamento comune spesso volte s'esprimono sillogismi in forma abbreviata. Cioè anziché dire « scrivere tutt'e due le premesse, ne ommettiamo una. Questa abbreviazione, la quale più che una speciale forma logica è una figura linguistica o rettorica, si chiama *entimema* ¹⁾; E precisamente *entimema* di primo o di secondo grado a seconda che la premessa tacita è la maggiore o la minore. P. es. « L'oro è un corpo semplice, dunque è indecomponibile » è un *entimema* di primo grado; « Tutti i corpi semplici sono indecomponibili, dunque l'oro è indecomponibile » è *entimema* di secondo grado. — Talvolta enunciamo ancora la sola conclusione aggiungendovi o premittendovi opportunamente il termine medio, come motivazione p. es. « l'oro, essendo corpo semplice è indecomponibile » Questo si chiama un *sillogismo contratto* ²⁾.

§ 21. Distinguaonsi due specie di sillogismi composti, cioè I) i sillogismi costituiti da giudizi composti, II) quelli formati da più sillogismi semplici.

I. Della prima specie sono i così detti sillogismi congiuntivi, nei quali le premesse sono giudizi congiuntivi. P. es. i categorici:

$$x < \text{hed} \dots$$

$$a < x$$

$$a < \text{hed} \dots$$

oppure

1) ἐνθὶμιαζ -- in questo senso è adoperato appena da QUINTILIANO. ARISTOTELE indica con questo nome un speciale ragionamento d'induzione dal simile al simile (*Anal. pr.* II, 25).

2) *Syllogismus contractus*.

$$x + y + z \dots < bed$$

$$a < x + y + z \dots$$

$$a < bed \dots \quad (Barbara)$$

p. es. « l'oro, l'argento, il platino sono metalli lucenti e preziosi; »

« Quell'orologio da tasca sarà d'oro, d'argento o di platino; »

« Dunque sarà sempre di metallo lucente e prezioso. »

E gl'ipotetici :

$$\tilde{x} < \tilde{y}\tilde{z} \dots$$

$$a < \tilde{x}$$

$$a < \tilde{y}\tilde{z} \dots \quad (Barbara)$$

Analogamente per gli altri modi e figure.

Sonvi quindi i sillogismi disgiuntivi, nei quali una od ambe le premesse sono giudizi disgiuntivi. P. es.

$$x < b + c + d \dots$$

$$a < x$$

$$a < b + c + d \dots$$

o l'ipotetico:

$$\tilde{x} < \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d} \dots$$

$$a < \tilde{x}$$

$$a < \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d} \dots \quad (Barbara)$$

« Se α è ξ α è β o γ o δ ...
 « se α è α α è ξ ...
 « se α è α α è o β o γ o δ ... »

E così per gli altri modi.

Se la disgiunzione è perfetta, cioè se

$$(1) \beta + \gamma = \delta = \xi = 0$$

e se la prima premessa è un'identità

$$\xi = \beta + \gamma + \delta...$$

mentre la seconda è un giudizio esistenziale, abbiamo una forma speciale di giudizi ipotetico-disgiuntivi che si dice dilemma, trilemma.... polilemma a seconda che i termini della somma disgiunta ($\beta + \gamma + \delta$...) sono due, tre o più.

Ecco dei trilemmi:

$\xi = \alpha + \beta + \gamma$	$\xi = \alpha + \beta + \gamma$	$1 = \xi = \alpha + \beta + \gamma$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = \beta = 0$
$\xi = 0$	$\beta + \gamma = 0$ [ex (1)]	$\gamma = 1$ etc. 1)
	$\xi = 1,$	

« P. es. Se questo mondo non fosse il migliore (ξ) Dio o non
 avrebbe conosciuto (α) o non avrebbe potuto (β) o non avrebbe

1) Si osservi che la condizione (1) è necessaria solamente in alcune somme, p. es. nel secondo trilemma citato. — La prima si riduce al solito *modus tollens*, la seconda può dirsi *modus ponendo-tollens* (afferma α , nega β o γ), la terza *modus tollendo-ponens* (nega α e β , afferma γ).

voluto (?) creare il miglior mondo. Ora nessuno di questi casi è vero (a cagione dell'omniscienza, onnipotenza e somma bontà di Dio), dunque questo mondo è il migliore fra tutti i mondi possibili, cioè $\xi = 0$, quindi $\bar{\xi} = 1$. — (LAMBKIZ) ¹⁾. »

1

« Due rette sono sempre fra loro parallele o convergenti; ma due rette che abbiano tutti i loro punti rispettivamente equidistanti sono parallele, dunque due rette che abbiano tutti i loro punti rispettivamente equidistanti non sono convergenti (CANTONI) ²⁾. »

Ancora possiamo qui annoverare le forme miste, nelle quali le premesse sono giudizi misti. La varietà di queste forme è stragrande, ma troppo facile a dedursi dallo schema generale del sillogismo categorico, con sostituzione di espressioni più complicate (polinomi, somme disgiunte) alle tre lettere semplici a b x oppure $\alpha \beta \bar{\xi}$ (per gl'ipotetici). Basta averne accennata l'indole e la classificazione.

II. Alla seconda specie di sillogismi composti appartengono quelli formati da più sistemi di premesse ossia da più sillogismi semplici. I sistemi possono essere o simultanei (congiuntivi) o alterni (disgiuntivi) ovvero misti. I primi sono i più importanti. P. es. da due sillogismi del modo *Barbara*:

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & x < y & e \quad z < b \\
 & a < x & y < z \\
 \hline
 & a < y & y < b
 \end{array}$$

1) Cfr. LINDNER *op. cit.* p. 93.

2) CANTONI *Corso elementare di filosofia*, Milano, Hoepli, 1891 vol. I p. 204.

ottego due conclusioni $a < y$, $y < b$ che danno per risultato $a < b$ (*Barbara*).

Oppure dalla congiunzione delle premesse in un solo sistema, ottego la forma

$$\begin{array}{ll}
 (2) \ z < b & \text{ovvero, disponendo altrimenti le premesse: } 3) \ a < x \\
 y < z & x < y \\
 x < y & y < z \\
 a < x & z < b \\
 \hline
 a < b & \hline
 a < b.
 \end{array}$$

La conclusione $a < b$ può anche ricavarsi dalle forme contratte:

$$\begin{array}{l}
 (4) \quad a < y \text{ a causa di } x \\
 y < b \text{ a causa di } z \\
 \hline
 a < b.
 \end{array}$$

I sillogismi del tipo 1) si dicono *polisillogismi*, quelli del tipo 2) *soriti progressivi* o *gocleniani* ¹⁾, del tipo 3) *soriti regressivi* o *aristotelici*, del tipo 4) *epicheremi*. Sostituendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ per a, b, x, y, z abbiamo gli analoghi sillogismi composti ipotetici. — Possono darsi molte varietà di polisillogismi e soriti (cfr. Esercizi),

1) Inventati da GOCLENTIO (1517-1628).

ma tali sillogismi composti possono considerarsi in generale come un sistema di più relazioni logiche (premesse, nel nostro caso le 4 esposte alla forma 2), dalle quali eliminando successivamente più quantità (termini medi, nel nostro caso 3: x, y, z), si ottiene una relazione fra le quantità rimanenti (nel nostro caso a e b): che è la conclusione. A seconda che si enuncia il risultato di ogni singola eliminazione, oppure si eseguiscano contemporaneamente tutte le eliminazioni, si danno i vari tipi 1, 2, 3, e 4.

Esempî. Qui prudens est, et temperans est; qui temperans est, et constans; qui constans est, et imperturbatus; qui imperturbatus est, sine tristitia est; qui sine tristitia est beatus est — ergo qui prudens est et beatus est (Tipo 3) ¹⁾

« Il premio desta il desiderio, ma il desiderio produce la meditazione, il premio dunque produce la meditazione ».

« La meditazione crea le arti e le migliora, ma il premio produce la meditazione; il premio dunque produce le arti e le migliora ».

« Le arti ed i loro miglioramenti ci danno di molte derrate e manifatture; ma il premio crea le arti e le migliora: il premio dunque ci dà l'aumento delle derrate e delle manifatture ».

« L'aumento delle derrate, e delle manifatture rende ricca la nazione; ma il premio ci dà l'aumento delle derrate e delle manifatture; il premio dunque rende ricca la nazione ».
(Tipo 1) ²⁾

« Se vuoi vivere agiatamente, devi saper lavorare, per guadagnare del danaro ».

« Se devi saper lavorare, devi essere diligente, giacchè devi imparare un mestiere ».

« Perciò se vuoi vivere agiatamente, devi essere diligente. — *modus ponens* — oppure « Non sei diligente, dunque non vivrai mai agiatamente » *modus tollens* (Tipo 4 ipotetico). ³⁾

1) SENECA, *ep.* 85.

2) GALUPPI, *Elementi di Filosofia*, Milano, Silvestri, 1806 vol. 1, p. 100.

3) LINDNER, *op. cit.*, p. 102.

I sistemi di premessa disgiunti o misti hanno meno importanza nella pratica, e, ad ogni modo, lo studio dei medesimi rientra nel problema più vasto che è quello di eliminare un qualsivoglia numero di termini da un sistema comunque dato di relazioni logiche. Basta all'uopo saper eliminare *un* termine — poniamo x — perchè nel medesimo modo che si eliminerà queste si potranno successivamente eliminare quanti altri termini, y , z ecc., si vogliano.

Questo problema fu risolto. ¹⁾ Diffatti potendosi ridurre il sistema delle premesse alla forma:

$$\Sigma (x_1 x_2 \dots x_n)$$

ove ciascuno degli x — giudizi elementari monomi. es. al § 16 — può non avere od avere l'accento della negazione e quindi può essere un giudizio elementare ad un rilievo universale o particolare; il medesimo sistema di premesse avrà la forma

$$\Sigma \Pi (A_k = 0) \Pi (A_i > 0),$$

ove sono scritti prima tutti gli x non accentati [$x_k = (A_k = 0)$] e quindi gli x accentati [$x'_i = (A_i > 0)$].

1) Dal prof. SCHRODER *Über das Eliminationsproblem in identischen Kalkül*, Tagblatt der 58. Versammlung deutscher naturforscher und Aerzte in Strassburg, 1885 p. 353 e segg.

Ma, per un teorema noto (Cfr. es. al § 16), un prodotto di giudizi universali può ridursi ad un solo giudizio elementare:

$$[\Pi (A_k = 0)] = [\Sigma (A_k = 0)].$$

Denotando il polinomio $\Sigma(A_k)$ con A avremo il sistema delle premesse ridotto alla forma

$$\Sigma[(A = 0) \Pi (A_i > 0)].$$

Onde sviluppando A ed A_i per x , cioè ponendo

$$A = ax + bx_1$$

$$A_i = p_i x + q_i x_1.$$

si ha

$$(1) \quad \Sigma[(ax + bx_1 = 0) \Pi (p_i x + q_i x_1 > 0)]^1).$$

ed il risultato dell'eliminazione di x è

$$(2) \quad \Sigma[(ab = 0) \Pi (p_i a + q_i b > 0)]^2).$$

1) Questa forma generale del sistema delle premesse fu data da MITCHELL (*Studies in logic by members of the John Hopkins University etc.* nello studio "On a new algebra of logic" p. 72-106.

2) SCHRÖDER, op. cit. vol. II parte I. p. 200.

La dimostrazione si dà negli esercizi.

Come casi speciali più semplici, si osservi che qualora il sistema dato consti di soli giudizi particolari, cioè $a = b = 0$, la risultante è

$$\sum_i n_i (p_i + q_i > 0).$$

se consta di soli giudizi universali la risultante è

$$\Sigma(ab = 0).$$

E più specialmente ancora, se abbiamo un solo giudizio elementare, particolare ed universale, cioè $A = 0$ oppure $A > 0$, abbiamo dall'eliminazione di x le seguenti relazioni:

$$\text{da} \quad \begin{matrix} ax + bx = 0; \\ 1 \end{matrix} \quad ab = 0$$

$$\text{da} \quad \begin{matrix} ax + bx > 0; \\ 1 \end{matrix} \quad a + b > 0.$$

Esercizi e problemi. Al § 19. 69) Dal giudizio elementare

$$\Sigma(abc) = abc + \underset{1}{abc} + \underset{1}{a\ bc} + \underset{1\ 1\ 1}{a\ b\ c} = 0$$

si passa, mediante la negazione all'altro

$$[\Sigma(abc)] = \underset{1}{(a + b + c)} \underset{1}{(a + b + c)} \underset{1}{(a + b + c)} \underset{1}{(a + b + c)} = 1$$

Eseguendo le moltiplicazioni si ha

$$\underset{1}{ab\ c} + \underset{1\ 1}{ab\ c} + \underset{1\ 1}{a\ bc} + \underset{1\ 1\ 1}{a\ b\ c} = 1$$

cioè che, del resto, s'ottenneva direttamente combinando la relazione data collo sviluppo dell'I per i tre argomenti a, b, c.

70) Dal giudizio « alcuni animali acquatici (a) non sono pesci (p) » e tutti i pesci sono animali acquatici » rappresentato dal sistema

$$(1) \quad a p_1 > 0$$

$$(2) \quad a_1 p = 0$$

si ottiene, negando la (1) ed in virtù della (2):

$$p + a_1 > 1$$

« i pesci e gli animali che non vivono nell'acqua non sono tutti gli animali possibili ».

71) Per avere la negazione di un giudizio composto $f(z_1 z_2 \dots z_n)$ basta ridurlo alla forma $\Sigma(z_1 z_2 \dots z_n)$; e, per un ragionamento analogo a quello fatto per i concetti, la negazione di $f(z_1 z_2 \dots z_n)$ sarà il termine complementare di $\Sigma(z_1 z_2 \dots z_n)$ per lo sviluppo dell'I per codesti z.

Ad esempio, la negazione del giudizio « vi è z assieme ad z oppure non v'è z »:

$$z_1 z_2 + z_1' z_2' = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2' z_3' + z_1 z_2' z_3 + z_1' z_2 z_3' + z_1' z_2' z_3 + z_1' z_2' z_3'$$

$$\text{sarà: } z_1 z_2 z_3' + z_1' z_2 z_3 + z_1' z_2 z_3' = z_1 z_2 z_3' + z_1' z_2 z_3$$

cioè: « o v'è z ed z e non v'è z, oppure v'è z ma non v'è z ».

72) Siasi osservato che i fenomeni a, b, c , avvengono solamente nelle combinazioni $abc, a b c, a b c$. Quali sono i più semplici

1 1 1 1 1 1

giudizi che si possono enunciare intorno ad a, b, c ?

— *Risp.* $a = b$ ed $ac = 0$ — (JEVONS). Si dimostri.

73) Si diano esempi di inversioni di giudizi a, c, i, o .

74) Se nessun a è bc , che segue rispetto b ed ac — *Risp.* nessun b è ac — (JEVONS).

75) Dimostrazione che la risoluzione generale dell'equazione

$$f(x) = 0$$

per x , è

$$x = f(0) \cdot \frac{1}{1} + f(1) \cdot \frac{1}{1}.$$

dove u ha un valore qualunque.

Dall'equazione data

$$f(x) = f(1), \quad x + f(0), \quad \frac{x}{1} = 0$$

si ha, per un teorema noto:

$$(1) \quad f(1), \quad x = 0$$

e

$$(2) \quad f(0), \quad \frac{x}{1} = 0.$$

Moltiplicando la (1) per $f(0)$ e la (2) per $f(1)$ ed addendo:

$$f(1), f(0), \quad x + f(0), \quad \frac{x}{1} = 0$$

ciò

$$f(1), f(0) = 0, \quad (\text{BOOLE})$$

Codesta equazione si dice risultante o risultato dell'eliminazione di x dall'equazione data; e chiamandosi soluzione quel valore che posto per x nell'equazione data, la riduce alla risultante, è chiaro che

$$x = f(0) \underset{1}{u} + f(1) \underset{1}{u} \quad (\text{BOOLE})$$

è una soluzione, perchè è

$$\begin{aligned} & f(1) \left(f(0) \underset{1}{u} + f(1) \underset{1}{u} \right) + f(0) \left(f(0) \underset{1}{u} + f(1) \underset{1}{u} \right) = \\ &= f(1) \left(f(0) \underset{1}{u} + f(1) \underset{1}{u} \right) + f(0) \left(f(0) \underset{1}{u} + f(1) \underset{1}{u} \right) = \\ &= f(1) f(0) \underset{1}{u} + f(1) f(0) \underset{1}{u} = f(1) f(0) \underset{1}{u} = 0 \text{ e, v. d.} \end{aligned}$$

Si mostra anche facilmente che *ogni* soluzione ha codesta forma. Difatti sia y una soluzione, allora dovrà essere, soddisfacendo y all'equazione data;

$$f(1) y + f(0) y = 0$$

cioè

$$(1) \dots f(1) y = 0$$

$$\text{e } (2) \dots f(0) y = 0$$

Ora posso scrivere

$$y = f(1) y + f(1) y$$

per la (1):

$$y = f(1) y_1$$

e per la (2):

$$y = f(0) y_1 + f(1) y_1.$$

Così y è ridotto alla forma voluta, ove in luogo del valore arbitrario u si scrive y stesso. Assegnando ad u valori speciali si hanno tante soluzioni singolari: però mentre l'equazione data è equivalente alla affermazione simultanea della risultante e della soluzione generale, non lo è se in luogo di quest'ultima si mette una soluzione singolare. —

Al § 20. 76) Dare esempî per tutti i modi delle cinque figure sillogistiche.

77) Ridurre a sillogismi completi i seguenti sillogismi contratti:

« Beati i misericordiosi perchè ad essi sarà fatta misericordia » ecc. (Math. V).

« Alcuni poemi non sono veri perchè non sono belli », « Le crociate non erano pazzie perchè avevano origine da un grande entusiasmo religioso » (LINDNER).

« Poichè egli fu educato fra zotici non può conoscere gli usi della buona società », « La riforma fu seguita da molti disordini: ella dev'essere condannata », (BAIN) — 1^a figura.

« La virtù non è una vana immaginazione, poichè l'uomo la può esercitare nella vita » (SCHILLER). « Alcune ipotesi non portano in sé gl'indizi della verità, poichè esse non sono semplici. » « Gli Unni non sono un popolo colto, poichè non avevano dinuora stabile » (LINDNER). « Se una regola è una legge che ammette delle eccezioni e un principio è una legge che non ne ammette, concludere che una legge può essere qualcosa di diverso da un principio » (SPALDING) — 2^a figura.

« Alcuni Pagani insegnavano verità, che erano assai simili alle dottrine cristiane, specialmente i filosofi greci ». « Alcuni scritti ameni, specialmente certi romanzi, sono dannosi ». « Alcuni uccelli non volano; così gli struzzi » (LINDNER) — 3^a figura.

78) Dove sta l'errore nelle seguenti conclusioni?

« Tu non sei ciò che son io »,

« Io sono un uomo »,

« Tu non sei un uomo ». (ARNAULD).

$$\text{è} \quad (ab = 0) \quad (p \frac{a}{1} + q \frac{b}{1} > 0).$$

Diffatto, essendo, in forza dell'equazione $ax + \frac{bx}{1} = 0$,

$$ax = 0$$

$$\frac{bx}{1} = 0$$

cioè

$$x < \frac{a}{1}$$

$$\frac{x}{1} < \frac{b}{1}$$

onde:

$$p \frac{x}{1} < p \frac{a}{1}$$

$$q \frac{x}{1} < q \frac{b}{1}$$

moltiplicando l'ineguaglianza rispettivamente per p e q . Addendo si ottiene:

$$p \frac{x}{1} + q \frac{x}{1} < p \frac{a}{1} + q \frac{b}{1}$$

Poichè il membro a sinistra è > 0 , sarà a fortiori

$$\frac{p a}{1} + \frac{q b}{1} > 0.$$

Dall'esercizio 75) si ha ancora che

$$[(ax + bx = 0) < [ab = 0];$$

Pertanto è:

$$(ax + bx = 0) (p x + q x > 0) < (ab = 0) (p a + q b > 0).$$

Assegnando ad i i valori $1, 2, \dots$ e moltiplicando le relazioni che si ottengono sostituendo $p_1 q_1, p_2 q_2, \dots$ per $p_i q_i$ nella formola ora dedotta, si ottiene:

$$[(ax + bx = 0) \cap (p_i x + q_i x > 0)] < [(ab = 0) \cap (p_i a + q_i b > 0)]$$

ed estendendo questo teorema a più termini di codesta forma, ed addendo:

$$\Sigma[(ax + bx = 0) \cap (p_i x + q_i x > 0)] < \Sigma[(ab = 0) \cap (p_i a + q_i b > 0)]$$

c. v. d. 1).

1) Bisogna osservare che il risultato dell'eliminazione così ottenuto non è completo se non coll'aggiunta di una certa *clausola*. Su di ciò cfr. SCHRÖDER *op. cit.* Vol. II parte 1, p. 210-216, 371-400.

Dottrina delle leggi del pensiero

§ 22. Le leggi del pensiero in generale;
loro funzione nella logica e metodo dello studio delle medesime

§ 23. Leggi delle quantità logiche universali,
particolari ed individuali

§ 24. Leggi delle relazioni delle quantità logiche

§ 25. Leggi delle operazioni colle quantità logiche

§ 22. La dottrina delle forme elementari poté essere sviluppata logicamente dalla definizione del concetto, soltanto assumendo alcuni principi assiomatici, nel trattare delle quantità logiche in sé e nelle loro relazioni ed operazioni.

Queste verità assiomatiche, p. es. quelle del principio d'identità « a è eguale ad a » o quella del principio di contraddizione « a non è non- a » furono sin dai tempi antichi ¹⁾ riconosciute ed affermate più o meno esplicitamente come evidenti, indimostrabili. Ciò nulla ostante in una logica rigorosa bisogna sottoporle ad una critica per misurare la portata e la forza restrittiva delle medesime. Essendo che da considerazioni puramente logiche non si possano affermare, sibbene s'aggiungano come dati incontrastabili dell'esperienza — e quindi di natura psicologica od ontologica — i quali limitano la generalità di una logica assoluta, più vasta ed indipendente da essi ²⁾. Precisamente

1) Secondo il PRANTL (*op. cit.* vol. I, p. 562) furono citati espressamente come $\alpha\gamma\chi\alpha\iota$ $\lambda\omicron\gamma\iota\chi\alpha\iota$ da GALEXO (*Theop. math.* I, 4, N p. 36): però sono conosciuti già da ARISTOTELE — vedi le note seguenti — e forse prima.

2) Prescindendo dalle idee vaghe di una *logica fidei* accanto alla *logica naturalis*, che sorgono assieme alla dottrina della doppia verità nella filosofia araba e che si comunicano agli Scolastici, a cominciare da ROBERTO HOLKOT (? 1349), credo che per primo appena il BOOLE (*An investigation of the laws of thought*, p. 50 nota) abbia esaminato seriamente la possibilità di una logica, basata su principi diversi da quelli della logica umana.

Come gli assiomi euclidei fondano la *nostra* geometria, che apparisce come un caso speciale della geometria non-euclidea.

Questi principi assiomatici si chiamano leggi del pensiero: e ci esprimono delle verità materiali, che sembrano intimamente inerenti alla costituzione della mente umana e che, essendo i primi dati relativi al contenuto i quali s'aggiungono alle pure forme del pensiero, già studiate, segnano il passaggio di quella parte della logica, che considera queste pure forme (Dottrina delle forme elementari) a quella che studia tali forme come racchiudenti contenuti reali (Dottrina delle forme sistematiche). Si esamineranno le leggi del pensiero nel medesimo ordine, col quale esse comparvero nello sviluppo delle forme logiche elementari. Queste si possono ridurre a tre tipi: 1) Quantità logiche per sè — rappresentate da lettere: $a, x \dots$ — cioè concetti in senso lato, nei quali si comprendono tanto i concetti, che i giudizi ed i sillogismi ed in generale tutte le forme logiche considerate in sè, come elementi (quindi concetti di un concetto, d'un giudizio ecc. 2) Relazioni di quantità logiche — rappresentate dai segni $<, >, =$ ecc. — cioè giudizi in senso lato: quindi relazioni di concetti, relazioni di giudizi ovvero relazioni di 2.^o grado..... relazioni di grado n^{mo} 3) Operazioni colle quantità logiche, cioè sillogismi in senso lato. (Cfr. § 17). — Pertanto si tratterà partitamente delle leggi delle quantità logiche, di quelle delle relazioni di quantità logiche e di quelle delle operazioni con quantità logiche.

§ 23. *Leggi delle quantità logiche.* I. Principio d'identità; « ogni quantità logica è eguale a sè stessa ¹⁾ ».

$$A = A.$$

A seconda che con A s'intende un concetto od una proposizione il principio suonerà: « Ogni oggetto del pensiero è eguale a sè stesso » oppure « Due proposizioni esprimenti la stessa relazione fra gli stessi oggetti del pensiero sono fra di loro identiche ».

Se nella nostra mente non consideriamo altro che i due termini 1 e 0, non posso eguagliarli fra loro, ma solo eguagliare uno a sè stesso:

$$1 = 1 \quad 0 = 0.$$

« L'essere è essere »; « Il non essere è non essere »: o, per i giudizi, « il vero è vero », « il falso è falso ».

La copula « è » va intesa come espressione di perfetta eguaglianza e si segna « = » significando che con un termine penso anche l'altro eguale e viceversa; oppure che posso porre sempre uno in luogo dell'altro.

II. Principio di contraddizione. Data una quantità logica A , dalle tre equazioni definienti la sua negazione A :

1

$$1) \quad AA = 0$$

.....

1) Δεῖ πᾶν τὸ ἀληθὲς αὐτὸ ἐκαστὸ ὁμολογούμενον εἶναι πάντῃ ARISTOTELI anal. pr. I, 32.

$$2) A \vdash A = 1$$

$$3) A = (A), \quad 1)$$

cioè — per i concetti:

1) « Non vi è niente che sia ad un tempo un dato oggetto logico e la negazione del medesimo oggetto » ²⁾

2) « Ciò che è un dato oggetto logico e ciò che non lo è costituiscono tutto il pensabile »

3) « La negazione della negazione di un dato oggetto è l'oggetto medesimo »

— e per i giudizi:

1) « Due proposizioni una affermante, l'altra negante la medesima relazione fra gli stessi oggetti del pensiero non possono essere mai contemporaneamente vere »

2) « Le medesime proposizioni non possono essere mai contemporaneamente false »

3) « Se è falsa l'una è vera l'altra, e viceversa »;

scaturisce il principio generale della contraddizione, che suona:

« Di due proposizioni, l'una affermante l'altra negante una stessa relazione fra gli stessi oggetti del pensiero, una è necessariamente vera e l'altra falsa » ³⁾.

Vi sono tre leggi speciali a cui s'applica questo principio, assumendo certe relazioni come vere e quindi ritenendo falso ogni giudizio che alla negazione della medesima perviene ⁴⁾.

1) Lo SCHRÖDER (*op. cit.* vol. I, p. 315 segg.) considera già queste tre equazioni come l'espressione delle leggi di contraddizione — la 1) —, del terzo escluso — la 2) — e della doppia negazione: *duplex negatio affirmat* — la 3) —.

2) Τὸ αὐτὸ ἀμὲν ὑπάρχειν καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀβύχτων τῶ αὐτῶ καὶ κατὰ αὐτό. ARISTOTELE *metaph.* IV, 3.

3) VOIGT, *op. cit.* p. 85.

4) così la falsità è sempre relativa: senza una « dictio » non c'è « contra-dictio ».

Queste leggi sono:

1) La legge di contraddizione valevole per i concetti ed i giudizi universali, che suona:

$$1 > 0. ^1)$$

« Il campo del pensabile non è nullo »;

Se non si desse un campo del pensabile, non esisterebbe nessun pensiero, per le definizioni dell'1:

$$A \leq 1.$$

$$=$$

Ciò che equivale a dire « A non è non-A ».

Diffatti se fosse

$$A = A_1$$

sommando e moltiplicando l'equazione per A si avrebbe

$$A = A + A_1$$

$$A = AA_1$$

onde:

$$A + A_1 = AA_1$$

1) Nell'esposizione fino al § 24 si segue sempre il VOIGT, *op. cit.* p. 13-14, 22-25, 32, 38-39.

ossia

$$1 = 0$$

c. v. d.

Ogni proposizione universale falsa, cioè incompatibile con un'altra vera, dà per risultante la negazione di questa legge, ossia il giudizio assurdo

$$1 = 0.$$

P. es. se vale la

$$xa + x \underset{1}{b} = 1$$

non potrà essere vera la

$$xa + x \underset{1}{b} = 1.$$

Essendo che, moltiplicate l'una per l'altra, danno.

$$(xa + x \underset{1}{b}) (xa + x \underset{1}{b}) = 1$$

cioè

$$0 = 1.$$

Essendo a una quantità qualunque, per la definizione dell' 1 e dello 0 potranno essere vere le relazioni

$$a = 1, a < 1, a > 0, a = 0$$

e, per la definizione di a_1 , rispettivamente sarà

$$a_1 = 0, a_1 > 0, a_1 < 1, a_1 = 1.$$

Se a è, invece, una quantità *reale* (non evanescente) potranno essere vere solamente le tre relazioni

$$a = 1, a < 1, a > 0$$

e quindi

$$a_1 = 0, a_1 > 0, a_1 < 1$$

ed a_1 sarà una quantità *parziale*.

Saranno adunque false le relazioni

$$a = 0, a_1 = 1.$$

Adunque:

Per i concetti ed i giudizi particolari, che si basano sulle quantità reali (cfr. § 16), oltre alla legge precedente — $1 > 0$ — per la quale è falso che $a = a_1$, vale la

2) Legge di contraddizione che dice: sonvi alcune quantità non nulle ovvero sia tali che debbano considerarsi come reali:

$$a > 0$$

— ed è falso che una di tali quantità sia eguale a zero; — ciò che equivale all'affermare che, se a è una quantità reale, i due giudizi

$$a < b \text{ ed } a < b_1$$

non possono essere entrambi veri; cioè almeno uno dev'essere falso.

Diffatti da

$$(a < b) (a < b_1) = (ab = 0) (ab = 0),$$

sommando, si ha

$$ab + ab = 0 \text{ ossia } a = 0$$

contro la legge:

$$a > 0.$$

Ogni giudizio particolare falso ha per risultante la negazione di questa legge, o della precedente.

Se a è un concetto individuale, esso non potrà stare in II relazione con verun altro: e perciò, dato un altro concetto b , ne sarà compreso od escluso: per tanto sarà:

$$ab = a \text{ ed } ab = 0$$

oppure

$$ab = 0 \text{ ed } ab = 0,$$

onde: dei due giudizi $ab = 0$ ed $ab = 0$; cioè $a < b$ ed $a < b$ almeno uno sarà vero, cioè non potranno entrambi essere falsi:

Per i concetti e giudizi individuali, oltre alle due leggi precedenti, vale la

3) Legge di contraddizione che dice: « a è b » oppure « non è b ; » nè vi è altro caso possibile ¹⁾.

Ogni giudizio individuale falso si riduce alla negazione di questa legge o delle due precedenti.

§ 24. I principi suesposti regolano la proprietà delle quantità logiche per sè stesse: ma dessi non bastano alla formazione dei giudizi, non potendo esprimere le relazioni fra le quantità logiche.

Diffatti in forza dei medesimi si può collegare una quantità data a con la stessa:

$$« a = a » \quad (\text{legge d'identità})$$

con la sua negazione a :

.....
1) Legge del terzo escluso, cioè « *principium exclusi tertii sive medii inter duo contradictoria* ». Cfr. ARISTOTELE. *de cat.* 10.

$$*(a = a) \quad (1^a \text{ legge di contraddizione})$$

e coi simboli 1, 0:

« (a = 0) » (2ª legge di contraddizione) •

mediante i segni dell'identità e delle non-identità;

Oppure (per la 2^a e 3^a legge di contraddizione) si può dire che *uno* dei due giudizi

$$a < b \quad \text{cd} \quad a < b$$

è vero, ma non si può stabilire quale sia vero e quando lo sia.

Per ciò si richiede un altro principio che ci abiliti all'uso del segno della subordinazione, insegnandoci quando lo possiamo porre fra due quantità date e quando no. A seconda che il segno della subordinazione sarà frapposto tra due concetti o tra due relazioni questo principio si chiamerà legge di modalità o legge di causalità; però, potendosi considerare sì i concetti che le relazioni come quantità logiche, le due leggi suddette non saranno che due diversi aspetti di un solo principio, che si dice principio della ragion sufficiente; il quale ci abilita a formare le relazioni tra le quantità logiche.

Le due leggi di modalità e di causalità, c' insegna la metafisica, suonano

« Ogni modo ha una sua sostanza »
ed

« Ogni effetto ha una sua causa ».

Se *a* esprime la sostanza o la causa e *b* il relativo modo od effetto possiamo porre, per la definizione della subordinazione, il segno $<$ fra i due, e dire:

$$a < b$$

cioè « *a* è *b* » oppure « se vi è *a* vi è *b* ».

Ma da pure considerazioni logiche, quando ciò sia, non possiamo escogitare; dobbiam quindi sempre riferirci ad un motivo d'altra natura (metafisico o psicologico) che ne induca a riconoscere gli effetti di certe cause, o ad attribuire certe proprietà alle cose; onde la necessità di detto motivo, sia desso tratto dall'esperienza o dall'intelligenza — ed il principio della ragion sufficiente:

« Non ammettere nel tuo pensiero alcuna cosa senza fondamento ».

Disse chiaramente il LEIBNIZ: « Ce principe est celui d'une raison suffisante pour qu'une chose existe qu'un événement arrive, qu'une vérité ait lieu ».

Essendo le subordinazioni di proposizioni la base del sillogismo (potendosi questo ridurre alla forma $\alpha < \beta$: se vale α , il sistema di premesse, vale la conclusione β . Cfr. § 20) il suesposto principio, che ogni subordinazione costringe, sarà essenziale anche pel sillogismo: e, tenendo conto delle leggi susseguenti riferibili alle operazioni con le quantità, apparirà come principio di inferenza (illazione), in forza del quale da un sistema

di premesse si potrà ritrar conclusioni: come che dalle verità di alcune proposizioni (cause) ne consegua la verità d'altre (effetti).

Questo principio fu variamente formulato ¹⁾ e la illazione fu ricondotta alla regola del « *dictum de omni* » (« *Quidquid valet de omni valet etiam de quibusdam et de singulis* » oppure « *Quidquid valet de genere valet etiam de specie* ») oppure del « *nota note* » (« *nota note est nota rei* » ovvero « *pradicatum predicati est quoque predicatum subiecti* ») ciò che, ricordando il significato di « *nota* », « *predicato* » ecc., equivale al dire: una quantità maggiore di un'altra, è anche (*a fortiori*) maggiore di una minore di quest'ultima, cioè

$$(b > c) (c > a) < (b > a);$$

locchè costituisce lo schema *Barbara*: ovvero può ridursi al principio di sostituzione, scrivendo i giudizi equivalenti:

$$(1) c = bc \quad c (2) a = ac$$

quindi

$$a = abc$$

avendo posto nella (2) per *c* il valore *bc* dato dalla (1).

1) ARISTOTELE lo enunzia così: *ὅσα κατὰ τοῦ κατηγορημένου λέγεται πάντα καὶ κατὰ τοῦ ὑποκειμένου ἐξηγήσεται* cat. 5. Cfr. anche anal. pr. I, 1. Il MILL (op. cit. vol. I, p. 207 seg.) propende per la medesima formulazione del principio; mentre il BAIR (op. cit. vol. I, p. 57) è più favorevole al « *dictum de omni* », il quale era ritenuto anche da AVICENNA (Psoud. Averroè. *Ques. in Prior. Resol.* f. 363 v. B. — PRANTL) come il solo giudizio categorico. — Secondo LAMBERT (*Neues Organon*, Parte I, cap. IV § 229 o seg.) a ciascuna delle quattro figure sillogistiche corrisponde un assioma speciale e cioè: alla I, il *dictum de omni*; alla II il *dictum de diverso*; alla III il *dictum de exemplo* ed alla IV il *dictum de reciproco*. Cfr. LINDNER op. cit. p. 72-80.

Lo schema del sillogismo *Barbara* è posto come principio dallo SCHÜDNER (op. cit. vol. I, p. 170 segg.) e sotto il nome di « *transitivity of the copula* » da DE MORGAN (*On the syllogism*, N II, 1850, p. 101) e da PIERCE (op. cit. p. 25). — HAMLETON o JEVONS adottano il principio della sostituzione.

Però, giova osservare, questa motivazione è relativa; poichè il motivo ha pur bisogno d'essere motivato da un altro motivo e così via e la logica, per evitare un circolo nella dimostrazione, deve arrestarsi a certi motivi ultimi, non motivati — i principi primi, indimostrati; gli *ἀνεξάρτητα*, di cui si tratta al § 31 — dei quali non può cribrare nè valutare assolutamente la forza.

P. es. ammettendo che la regola del « *nota notæ* » sia quella che autorizza a conchiudere, cioè sia il motivo (« *leading principle* » PERCEE) ¹⁾ del sillogismo:

Tutti gli uomini sono mortali

Pietro è uomo

Pietro è mortale;

La forza della motivazione sta in un altro sillogismo:
« *Nota notæ est nota rei* »

« La mortalità è una nota di uomo; ed uomo è una nota di Pietro »

« La mortalità è una nota di Pietro »
pel quale abbisogniamo di nuovo di una motivazione per concludere dalle premesse ecc.

Dovendo pertanto intendersi il principio della ragion sufficiente nel senso che ogni proposizione⁴ ha bisogno di un'altra come suo fondamento o motivo, possiamo aggiungere al principio formulato prima in modo ge-

.....
1) PERCEE, *op. cit.* p. 19.

nerale, un altro che può dirsi *principio di relatività* ed enunziarlo: « Ogni verità logica (definizione o teorema) vale solamente in unione (o relazione) d'altre verità logiche ».

Cfr. la relatività delle definizioni di $<$, 0, 1 e quindi della somma, del prodotto (al § 10, oss. fine) nonché quella della falsità (§ 22, II).

§ 25. Le leggi che si riferiscono alle operazioni con le quantità logiche sono connesse strettamente col simbolismo della matematica logica ¹⁾, ed anzi che leggi universali del pensiero devono risguardarsi piuttosto come il complesso degli assiomi (e delle definizioni) che regolano il calcolo colle quantità logiche. Ancor non è fissato sicuramente il loro numero, e, come per gli assiomi fondamentali di altre scienze p. es. della geometria, dell'aritmetica, v'è una certa arbitrarietà nella scelta, dandosi parecchie volte, *puta caso*, tre proposizioni, delle quali prese due qualunque come assiomi, l'altra ne deriva.

Secondo la più recente enumerazione, quella del Prof. PEANO (Rivista di mat. fasc. febr.-marzo 1894, p. 26 segg.), sarebbero assiomi:

- (1) $a < a$
- (2) $a < a.a$
- (3) $ab < a$
- (4) $ab < ba$
- (5) $abc < acb$

¹⁾ Questo simbolismo si fonda specialmente sul segno della subordinazione e sulla sua negazione: sarebbe tutt'altro se in luogo di questo si scegliesse un altro p. es. il segno dell'egnaglianza o quello della disgiunzione con le loro negazioni. Cfr. *LYON op. cit.* SCHÖNBER *op. cit.* vol. II. Parte I. p. 119, 123.

- (6) $(a < b) < (ac < bc)$
 (7) $(a > o) (a < b) < (b > o)$
 (8) $(a < b) (b < c) < (a < c)$
 (9) $(b > o) < [(a > o) < (ab > o)]$
 (10) $(a < b) < (b < a)$
 (11) $(a) < a$
 (12) $aa = o$

nei quali però talvolta può sostituirsi al segno $<$ il segno dell'eguaglianza. L'(1) si riferisce al principio d'identità, (2) — (5) esprimono proprietà del prodotto; gli ultimi si riferiscono alla negazione. Sembra però che ulteriori semplificazioni sieno possibili (cfr. SCHRÖDER, *op. cit.* vol. I, p. 710); p. es. che possa ommettersi il (7) come dedotto dall'(8) — che è il principio dell'illazione —. Vedi la enumerazione degli assiomi, riassunti dallo SCHRÖDER (*op. cit.* vol. II §§ 29, 31) e l'articolo di W. E. JOYSSON *The logical calculus. I. General Principles*, testè comparso nel « Mind ».

Va notato il così detto *principio di dualità*, che suona: « da ogni formola valevole nella logica si può dedurre un'altra, scambiando fra loro i segni \times e $+$, $<$ e $>$, 0 ed 1, e lasciando invariato il segno $=$ ».

PARTE II

Delle forme sistematiche

CAP. I

Teoria generale

§ 26. Definizione delle forme sistematiche
e loro connessione con le forme elementari

§ 27. Classificazione e metodo nello studio
delle forme sistematiche

§ 26. Si disse dottrina delle forme sistematiche quella parte della logica che tratta del pensiero considerato, oltre che nella sua forma, nel suo contenuto in generale. Essa ha quindi di mira tanto la esattezza formale che la verità materiale del pensiero. Però siccome è parte della logica pura, teoretica, non considererà le singole verità del contenuto, chè allora, diventando nozione determinata di una particolare scienza, perderebbe il carattere normativo ed universale che per la logica pura o teoretica vien richiesto — sibbene riguarda la verità di contenuti, che si lasciano a bella posta indeterminati ad ulteriori specializzazioni. In breve studierà i tipi delle forme logiche riempite da termini reali; studierà il pensiero formalmente esatto e materialmente vero, in generale. Per

quanto si riferisce al primo requisito — esattezza formale — il pensiero dovrà mostrarsi in una delle forme già studiate: e pertanto dovremo necessariamente rivolgere la nostra attenzione a ciascuna delle forme elementari, esaminandole ora però anche in rispetto alla verità materiale. Quindi mentre nella prima parte si esaminarono tali forme come si riscontrano in ogni discorso ragionato, ricorrente pur anco nella vita usuale, dove non sempre — come p. es. nelle dispute — emerge la rigorosa verità del contenuto; in questa seconda parte, importandoci le nozioni veraci che in tali forme si contengono, le si studieranno come parti del pensiero scientifico.

Una scienza è appunto un sistema di nozioni vere, relative ad un determinato oggetto o campo di studio ¹⁾.

§ 27. La teoria delle forme sistematiche si divide nei seguenti capitoli:

I. Dottrina della definizione e della divisione. II. Dottrina dell'argomentazione o della prova. III. Dottrina del metodo.

Il primo si riferisce al concetto considerato rispettivamente secondo il suo contenuto e secondo la sua sfera; il secondo al giudizio, il terzo al sillogismo. Ma, mentre nella I Parte si considerò il concetto come elemento, il giudizio come derivato dal concetto, il sillogismo dal giudizio, qui si considera il concetto in quanto è parte di giudizi, il giudizio in quanto è

1) Cfr. GALUPPI *op. cit.* vol. I p. 13.

parte di sillogismi, il sillogismo in quanto è parte di un sistema di sillogismi concatenati.

Pertanto colla definizione e colla divisione si studierà la verità materiale dei concetti e si indagherà la influenza di tale verità per la verità materiale dei giudizi. Coll'argomentazione si studierà la verità materiale dei giudizi e si investigherà la influenza di tale verità per la verità materiale dei sillogismi, ossia di altri giudizi da quelli dedotti, come conclusioni di vari ragionamenti. Col metodo si studierà la verità materiale di sillogismi e si investigherà la influenza di tale verità su sistemi di sillogismi o di nozioni concluse, ordinate in un tutto: o, in altri termini si studierà il processo col quale più nozioni verranno sistematicamente ridotte in una unità.

Nella dottrina delle forme elementari avevamo ritrovato nel sillogismo il giudizio ed il concetto come elementi (cfr. § 4), ora per far rilevare il lato sistematico di queste forme e la loro funzione, osserviamo che il sillogismo si riduce materialmente al giudizio ipotetico

$$\alpha < \beta$$

« se è vero α (il sistema delle premesse) è vero β (la conclusione) » ed equivale al giudizio categorico composto:

$$\ll \alpha = 0 \text{ oppure } \beta > 0 \gg$$

cioè, « o non è vero α (sono false una o più premesse) oppure è vero β (nel caso che nessuna delle premesse sia falsa, cioè che sia $\alpha > 0$). »

Ora la dottrina sistematica del giudizio, cioè l'argomentazione, ha l'ufficio di studiare quando α sia da porsi eguale a zero e quando no, e di esaminare quali effetti da tali determinazioni

1) Possiamo dunque dire che, considerandone il lato ontologico, in questa parte della logica si tratta della verità materiale delle quantità logiche, cioè delle cose e dei fatti considerati come reali; della verità materiale delle relazioni, cioè delle proprietà delle cose e delle leggi dei fatti; o della verità materiale delle conclusioni; cioè delle motivazioni, dei « perché », che collegano fra loro le proprietà delle cose o le leggi dei fatti.

risultino per la verità materiale del sillogismo, cioè che valore debba attribuirsi alla conclusione β .

Analogamente tanto le premesse (che costituiscono α) che la conclusione (β) sono giudizi della forma:

$$a < b$$

i quali hanno il medesimo significato ambiguo rispetto alla realtà materiale; essi equivalgono a:

$$(a > o) < (b > o)$$

« se vi è a , esso è b ; vi è b » cioè lasciano incerti nell'alternativa

$$« a = o \text{ oppure } b > o »$$

« o non vi è a , oppure vi è b (che è nota di a , supposto esistente). La dottrina sistematica del concetto, ha l'ufficio di studiare quando debba porsi $a = o$ e quando $a > o$, e di esaminare quali effetti da tali determinazioni risultino per la verità materiale del giudizio e quindi del predicato b)¹⁾.

La dottrina delle forme sistematiche ha dunque il compito di stabilire quando una quantità logica A esiste e quando no, ossia di stabilire quale delle due relazioni

$$A = o \quad A > o$$

— che al § 38 vedemmo egualmente possibili — abbia realmente luogo; e quindi di rilevare gli effetti che per le forme superiori formate da A , derivano. Questi effetti si deducono necessariamente con le leggi del pensiero (esposte alla Parte I cap. V), le quali rego-

lano la connessione dei nostri pensieri in generale; e così possiamo notare un parallelismo fra le dottrine delle forme sistematiche e i tre principi di identità, contraddizione e ragion sufficiente.

La definizione e la divisione appunto non sono altro che la espressione della identità di un concetto col prodotto delle sue note o la somma delle sue parti. Nella dottrina dell'argomentazione possiamo dedurre la falsità o verità di un giudizio dalla verità o falsità riconosciuta di un altro, soltanto mediante il principio di contraddizione; e soltanto col principio della ragion sufficiente possiamo stabilire il nesso di causalità fra due giudizi, interponendovi il segno \leq , e quindi trattare sistematicamente della verità materiale dei sillogismi.

CAP. II

Dottrina sistematica del concetto

§ 28. Teoria generale — § 29. Teoria della definizione

§ 30. Teoria della divisione

§ 28. Nella dottrina sistematica del concetto si tratta di istituire una identità tra due membri dei quali il primo (« definendo » o « dividendo ») è un concetto dato x . A seconda che l'altro (« definiente » o « dividente ») è posto nella forma di un prodotto o di una somma la identità esprime una definizione ¹⁾ od una divisione ²⁾, così:

1) ἐπιστῆς.

2) διαίρεσις.

$$x = abc\dots$$

p. es. « il barometro è uno strumento fisico che fa conoscere il peso dell'aria atmosferica e le sue variazioni »;
è una definizione.

$$x = a + b + c\dots$$

p. es. « i triangoli sono equilateri, isosceli o scaleni »;

è una divisione.

Si vede che la definizione non è altro che un giudizio d'identità congiuntivo; ed il processo col quale è fatta è quello della determinazione. La divisione non è altro che un giudizio d'identità disgiuntivo.

Al giudizio d'identità misto, cioè della forma

$$x = ab + cd + \dots$$

non corrisponde una nuova forma sistematica, esso si riduce ad una specie di divisione (così detta condivisione). Cfr. § 30.

Secondo quanto si disse nella prima parte, con la definizione si esprime il contenuto (prodotto dei sovraordinati) e con la divisione la sfera (somma dei subordinati) del concetto dato.

Per trattare delle leggi comuni a queste due forme sistematiche esprimiamole con le equazioni:

$$x = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$x = \sum_{k=1}^m b_k$$

e consideriamo le condizioni a cui debbono soddisfare in generale, tanto nel caso che il membro a destra sia affetto dal segno del prodotto (Π) o da quello della

somma (Σ) — le quali due operazioni, si sa, corrispondono perfettamente pel principio di dualità. . .

1). Affinchè il segno $=$ possa esser posto fra i due membri è necessario che valgano simultaneamente le due relazioni:

$$(1) \dots x < \prod_{i=1}^n a_i$$

$$(2) \dots \prod_{i=1}^n a_i < x$$

$$(1) \dots x < \sum_{k=1}^m b_k$$

$$(2) \dots \sum_{k=1}^m b_k < x$$

Se ciò non avviene la definizione o la divisione non può farsi: e se è così fatta si dice *inadequata*; Quando vale solamente la (1) si dice troppo ampia; se vale la (2) e non la (1) si dice troppo ristretta.

P. es. « Gli Abissini sono un popolo dell'Africa » è una definizione troppo ampia; « Le case di abitazione sono costruite con mattoni o con pietra o con terra o con ferro o con legno » (Jevons) è una divisione troppo ristretta.

2) Il numero n dei fattori del definiente dev'essere il minimo possibile; ed una definizione espressa da

$$x = \prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_n \prod_{i=1}^n a_i$$

Il numero m degli addendi del dividendo dev'essere il minimo possibile; ed una divisione espressa da

$$x = \sum_{k=1}^{m+1} b_k = b_m + \sum_{k=1}^m b_k$$

ove sia già

$$x = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$x = \sum_{k=1}^m b_k$$

e quindi essendo

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_n + 1 \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

$$\sum_{k=1}^m b_k = b_m + 1 + \sum_{k=1}^{m-1} b_k$$

è

$$a_n + 1 > \prod_{i=1}^n a_i$$

$$b_m + 1 < \sum_{k=1}^m b_k$$

cioè

$a_n + 1$ è sovraordinato al determinante

$b_m + 1$ è subordinato al dividente;

si dirà *sovraabbondante*, essendo tale il numero

dei fattori $n + 1$

degli addendi. $m + 1$

P. es. « I libri sono utili, dilettevoli od inutili » è una divisione sovraabbondante. — Una divisione non è certamente sovraabbondante quando, analogamente a quanto veniva richiesto nei giudizi divisivi propriamente detti, i singoli addendi sono fra di loro disgiunti, cioè il prodotto di qualsivoglia paio d'essi è zero. Cfr. § 30.

Una definizione sovraabbondante sarebbe « un parallelogrammo è un quadrilatero avente i lati opposti uguali e paralleli » (LANDNER).

3) Affinchè

la definizione

|

la divisione

sia veramente una forma sistematica, essa non deve ridursi alla semplice espressione del principio d'identità, cioè essa non deve avere la forma

$$x = x$$

che sarebbe una *tautologia* (*idem per idem*).

P. es. « Il triangolo è una figura triangolare ». « Gli animali terrestri-acquatici sono quelli che vivono in terra od in acqua » sono una definizione od una divisione tautologica.

Una forma erronea simile è il *circolo* (*circulus in definiendo*) quando il definiente viene spiegato col definendo; p. es. « un battaglione è l'unione di quattro compagnie » ed « una compagnia è la quarta parte di un battaglione ». —

Per la 3) non può essere

$$\frac{a}{k} = 0$$

|

$$\frac{b}{k} = 1$$

e per la 2) non può essere

$$\frac{a}{i} = 1$$

|

$$\frac{b}{k} = 0$$

onde si può asserire che

ciascun fattore del definiente | ciascun addendo del dividendo

dev'essere una quantità reale e parziale:

$$0 < \frac{a}{i} < 1$$

|

$$0 < \frac{b}{k} < 1$$

§ 29. Conoscendo un numero n sufficientemente grande di note si può definire qualunque quantità logica: all'uopo basta formarne il prodotto; p. es. sapendo che un quadrato ha quattro lati eguali ed (almeno) un angolo retto.... lo si definisce dicendo: il quadrato è la figura avente quattro lati eguali, (almeno) un angolo retto....

Si dimostrò che tale proposizione vale, ed in che senso, per i concetti individuali ¹⁾ e, quindi, per qualunque concetto generico ²⁾, dal quale per determinazione ai primi si perviene. — Per quanto si disse al § 10 l'« *universe of discourse* » ed i concetti massimi (categorie) non si possono decomporre in fattori, nè quindi definire altrimenti che con una tautologia. Lo « zero » può definirsi in infiniti modi col prodotto di qualsiasi quantità tra lor disgiunte.

Spesso anzichè enumerare tutte le singole note pertinenti ad un concetto: ciò che sarebbe incomodo e, talvolta, impossibile a fare, si raggruppano più note in un concetto, che entrando come fattore nella definizione, surrogherà più fattori speciali di cui è prodotto, e si dirà nota principale od essenziale del definendo. P. es. nella definizione « La macchina a vapore è quella macchina in cui il vapore agisce come forza motrice » il nome « macchina », che designa una pluralità di note, è il genere prossimo.

A tale raggruppamento di più note in una si riduce il canone: « la definizione avvenga mediante il genere

1) A. NAGY. *Fondamenti del calcolo logico*. Napoli, Pellerano, 1889. Cap. IV.

2) *ibid.* p. 22.

prossimo e la differenza specifica » 1 : intendendosi per *genere prossimo* il concetto

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

prodotto colla moltiplicazione di $(n - 1)$ note, cui distinguiamo ancor più da vicino nella definizione, coll'aggiunta dell' n nota a (*differenza specifica*):

$$x = a \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

a , cioè la differenza specifica può ridursi ad una quantità numerica (grandezza, valore speciale del genere prossimo)²⁾. Inoltre è evidente la analogia della fissazione di un concetto (elemento) mediante le sue n note, con la fissazione di un punto mediante i valori di n variabili indipendenti (parametri, coordinate) in una varietà (moltiplicità) n dimensionale. Su queste due proposizioni si basa la possibilità di rappresentare graficamente le quantità logiche³⁾.

Potendosi in un rapporto di identità scambiare i due membri, sonvi due forme per ogni definizione

1) ὁ ὁρίζων ἐστὶ γένος καὶ διαφορῶν ἐπὶ τὸν (ARIST. *top.* I, 8).

2) *Fondamenti* p. 17.

3) Vedi le mie note *sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche*, Rend. di R. Accad. di Lincei, vol. VI, p. 50-56, 373-378.

$$(1) \quad x = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$(2) \quad \prod_{i=1}^n a_i = x.$$

La (1), dove vien posto anzitutto il definendo e quindi si considerano le note in cui vien decomposto, si dice definizione *analitica*; La (2), nella quale la nostra attenzione si rivolge prima alle note componenti e quindi al concetto da esse composto, si dice *sintetica* o *genetica*. P. es. sono definizioni della (1) specie tutte quelle finora date in questo capitolo. Della (2) specie sarebbero: « Se io tolgo ad un altro ciò che egli legittimamente possiede commetto un atto che dicesi *furto* » (CANTONI). « Un punto che si muova in un piano intorno ad un altro punto fisso in maniera da conservare sempre una eguale distanza da questo, descrive un cerchio » (LINDNER).

In ogni caso con la definizione noi non facciamo altro che dichiarare ciò che dobbiamo pensare sotto un dato nome in uso, *x*, col quale designiamo il concetto da definirsi.

Se non vi fosse questo nome speciale del concetto, la fissazione di quest'ultimo non potrebbe avvenire che coll'indicazione delle sue note e la definizione si ridurrebbe ad una tautologia ¹⁾.

1) Quest'era già l'opinione degli scettici. Cfr. ARIST. *Metaph.* IV, 29.

Quindi tutte le definizioni sono per loro natura *nominali* e dipendenti dal linguaggio ¹⁾. Si diranno invece definizioni *reali*, quelle che avranno di mira anche l'esistenza oggettiva (metafisica) del definendo (x) e, quindi, delle note (a) con le quali lo si definisce.

Se ha da essere

$$\prod_{i=1}^n a_i > 0$$

è necessario che valgano i giudizi

$$a_i > 0, \quad a_i a_j > 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n);$$

però lo studio ulteriore di questi singoli giudizi esistenziali, collegandosi alle speciali verità della scienza e dell'esperienza, trascende i limiti della logica pura.

Similmente, sembra spettare più alla retorica che alla logica lo studio delle così dette definizioni imperfette, le quali talvolta suppliscono (più o meno male) alle vere definizioni, e sarebbero: 1) la locuzione, 2) la distinzione, 3) la caratteristica 4) la spiegazione, 5) la descrizione e 6) il confronto ²⁾. La 2) e la 6) si riducono ad un raggruppamento imperfetto delle note nel genere prossimo, le altre alla scelta di una imperfetta differenza specifica: tutte sono forme sistematiche troppo ristrette. Cfr. § 28, 2.

.....
2) ὁ ὀρίζόμενος διακρίνει ἢ τί ἐστίν ἢ τί σημαίνει τὸν νοῦν. ARIST. *Anal. post.* II, 7. La questione delle definizioni reali e nominali fu lungamente agitata dai filosofi. Vedi la chiara esposizione che ne fa il CANTONI (*op. cit.* p. 154 e seg.).

2) LINDNER *op. cit.* § 67.

§ 30. Una quantità logica a , può in generale, esser decomposta in parti, così che equivalga alla somma delle medesime. All'uopo basta trovare un'altra quantità b , tale che sia

$$(1) \quad 0 < ab < a$$

— il segno $<$ anche qui è negazione di « eguale »
 —; a è allora diviso da b in due parti, ab ed ab che
 son fra loro disgiunte:

$$(2) \quad (ab) (ab)_1 = 0$$

e complementari per a :

$$(3) \quad ab + ab_1 = a.$$

Queste due ultime equazioni esprimono due condizioni essenziali per una perfetta divisione ¹⁾

Quelle quantità per le quali non può trovarsi un b tale che sussistano le dette 3 equazioni si chiamano quantità indecomponibili e sono individui (elementi) oppure quantità evanescenti.

Se la (2) non vale, le parti non sono disgiunte (cfr. § 28 II nota) ma compenetrandosi fra di loro non dividono nettamente la sfera del dividendo p. es. chi dividesse i libri consigliabili (a) in utili (b) ed in dilettevoli (c), farebbe una cattiva divisione, perchè è:

1) Cfr. BAIN, *op. cit.*, vol. II p. 290.

$$(ab) (ac) > 0,$$

potendosi dare libri utili e dilettevoli insieme.

Se non vale la (3) la divisione è o troppo ampia o troppo ristretta (cfr. § 28 I).

Similmente per la divisione di un concetto (\hat{a}) in un numero qualsivoglia (n) di parti (ab_k), basta che sia

$$(1) \dots 0 < ab_k < a \quad (k, = 1, 2, \dots n)$$

$$(2) \dots (ab_k) (ab_i) = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots n)$$

$$(3) \dots \sum_{k=1}^n ab_k = a. \quad \begin{matrix} k > i \\ < \end{matrix}$$

a è, come prima, l'intero dividendo; gli ab_k sono i termini (membri, parti) della divisione, i b_k le differenze specifiche. Affinchè la (3) sia soddisfatta basta che sia

$$b_k \geq a.$$

Il concetto generico della classe $\sum_k b_k$, si chiama fondamento (principio) della divisione. P. es. nella divisione dei corpi in solidi, liquidi ed acriforimi il fondamento della divisione è lo stato d'aggregazione delle molecole; dividendo i vini in bianchi e rossi il fonda-

mento è il colore ecc. A seconda che il numero dei termini (n) è due, tre... o più la divisione si dice dicotomia, tricotomia... politomia.

Dicotomie perfette s'ottengono sicuramente prendendo per differenze specifiche un concetto b e la sua negazione \bar{b} ; così che è già per definizione

$$\frac{b, \bar{b}}{1} = 0$$

$$\frac{b + \bar{b}}{1} = 1$$

e quindi la (2) e la (3) sono soddisfatte. b dev'essere però scelto in modo da soddisfare anche la (1). Tale è p. es. la divisione dei libri in utili ed inutili; ecc.

Si hanno politomie giuste assegnando alla differenza specifica b , che può essere ridotta ad una quantità numerica (cfr. § 29

^k) tutti i valori possibili. A queste — come giustamente osserva il LINDNER ¹⁾ — appartengono le divisioni delle temperature, dei suoni, la divisione dei corpi secondo la densità o la solidità, la divisione degli uomini secondo le differenti dimensioni del corpo e delle sue parti, specialmente del cranio e dell'angolo facciale; delle città secondo il numero degli abitanti, dei paesi secondo la densità della popolazione ecc. — Questa gradazione può, ancora, arrestarsi ad un numero qualunque e comprendere tutti i numeri rimanenti in un termine che è la negazione dei termini assunti, ponendo p. es. in

$$a = \frac{ab}{1} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{3} + \frac{ab}{4} + \dots$$

$$\frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6} + \dots = \frac{b}{n}$$

la divisione può ridursi alla tetratomia:

1) Op. cit. p. 122.

$$a = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ab_m$$

Così, arrestando due volte la divisione con un limite massimo ed uno minimo possiamo dividere la città in: città che hanno meno di 1000 abitanti, città che ne hanno da 1000 a 10,000, da 10,000 a 100,000, da 100,000 a un milione, e città che hanno più d'un milione d'abitanti.

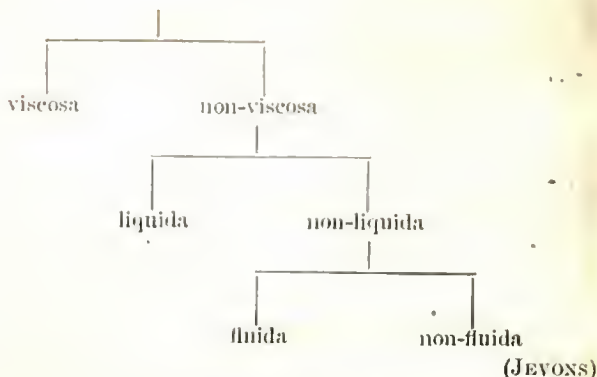
Nella trattazione scientifica il tutto viene ripartito non con una sola ma con ripetute divisioni, e s'ha ciò che si dice una *classificazione*. Le divisioni ulteriori possono effettuarsi di nuovo sul dividendo dato, oppure su alcune delle parti ottenute mediante la prima divisione. Nel primo caso abbiamo la così detta *condivisione* ¹⁾. Dato, ad esempio, il tutto a lo dividiamo primieramente nelle parti ab_1, ab_2, ab_3, \dots , prendendo per fondamento della divisione b : quindi prendendo per fondamento c , ripartiamo il medesimo a in ac_1, ac_2, ac_3, \dots .

I prodotti $(ab)_1, (ab)_2, (ab)_3, \dots$ ovvero sia ab_1, ab_2, ab_3, \dots che s'ottengono eseguendo le moltiplicazioni nell'equazione:

$$a = a(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)(c_1 + c_2 + c_3 + \dots)$$

sono nuove parti di a , che si dicono risultati della

1) συνδιαίρεσις.



Questo modo di classificare è sempre esatto.

Il fondamento dev'essere mantenuto per tutta la divisione e, possibilmente anche nelle suddivisioni. Esso dev'essere in stretto nesso coll'essenza del concetto da dividersi e col fine della divisione: così il medico non fa delle piante la medesima distinzione che ne fa il botanico (CANTONI), e la divisione degli uomini secondo il colore degli occhi non sarebbe lodevole perchè si basa su una nota accidentale. — Nella classificazione non vi dev'essere il salto, ma i membri del dividente devono essere derivati immediatamente dall'ultima divisione. Vi sarebbe un salto nella classificazione degli esseri in animali, piante, minerali, dovendosi prima distinguere in organici ed anorganici

CAP. III

Dottrina sistematica del giudizio

§ 31. Dell'argomentazione

§ 31. Si disse che nella dottrina sistematica del giudizio si esamina la verità materiale del giudizio stesso, in quanto questo fa parte di giusti sillogismi.

Diffatti si sa (§ 27) che ogni sillogismo si riduce alla forma

$$\alpha < \beta$$

« se è vero α , il sistema delle premesse, è vera la conclusione β . La dottrina elementare ci dà questa connessione tra α e β , ma non ci dice nulla intorno alla realtà di β , in quanto questa è dedotta da α . Cioè non decide dell'alternativa

$$\beta > 0 \quad \text{oppure} \quad \beta = 0$$

β può essere vero, ma non si è certi che lo sia. Il vero accertato è *reale* (esistente, > 0). Perchè β sia reale è mestieri che sia $\alpha > 0$; bisogna adunque provare la realtà del giudizio (o dei giudizi) α .

Si dice *argomentazione* (dimostrazione, prova) ¹⁾ quella operazione che prova la realtà di un giudizio colla realtà di un altro. All'uopo giova distinguere tre elementi:

- 1) La *tesi* o proposizione da dimostrarsi (β);
- 2) Gli *argomenti* (motivi, prove) — sistema di premesse (α);
- 3) Il *nerbo dell'argomentazione* (« nervus probandi ») o forma sillogistica che fa dedurre β da α (il segno $<$).

Ma anche il giudizio motivo (α) per essere accertato avrà bisogno di un altro giudizio α' , questo di un α'' e così via; e d'altra parte potremo provare con β un altro giudizio β' , con

1) Gr. ἀποδείξις Lat. demonstratio, probatio Ted. Beweis.

questo un successivo β'' ecc. di modo che avremo una serie di giudizi, di cui ognuno è prova del giudizio seguente ed è provato dal precedente:

$$\dots \alpha''' < \alpha'' < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < \beta'' \dots$$

(n)

Questa serie dovrà arrestarsi ad una certa proposizione α — di minima estensione — tale che sia prova delle susseguenti
(n + 1)

ma essa medesima indimostrabile da un'altra α , perchè se la serie fosse infinita non vi sarebbe vera prova ed ogni dimostrazione sarebbe illusoria. D'altra parte evvi un altro estremo
(m)

β — di massima estensione — che è provato dai precedenti, ma che non può provare un'altra nuova proposizione β .
(m + 1)

Tali proposizioni α — che sono i giudizi più universali, il « primo intelligibile », analogo per l'estensione all'individuo
(n)

nella teoria del concetto, si dicono *immediate* ¹⁾. Se α è tale che la sua verità è evidente, indiscutibilmente certa e che si impone all'umana ragione si dice assioma ($\alpha\acute{\xi}\iota\omega\mu\alpha$); com'è p. es. quello che « due quantità eguali ad una terza sono eguali fra di loro »; sono assiomi tutti i principî dell'umana ragione stu-
(n)

diati al Cap. V. Se invece la α viene *posta* come vera è una *tesi* ($\theta\acute{\epsilon}\sigma\iota\varsigma$) od anche una *ipotesi* ($\hbar\pi\acute{o}\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$), qualora ha da venir confermata dalle conclusioni o dall'esperienze: p. es. è una ipotesi la teoria dell'étere, quella di Darwin ecc. Si chiama *postulato* ($\alpha\acute{\iota}\tau\eta\mu\alpha$) quando chi dimostra chiede agli uditori, che non ne vorrebbero forse concedere la verità, il permesso di assumerla come vera.

(m)

Le proposizioni β sono invece i giudizi più individuali, il « primo sensibile », analogo per l'estensione alle categorie nella teoria del concetto, e sono le affermazioni dei fatti immediatamente percepiti ²⁾.

1) Ἀρχὴ ὅ ἐστιν ἀποδείξεως πρότασις ἄμετος δὲ ἥς μὴ ἐστὶν ἄλλη πρότερον. ARIST. Anal. post. I, 2.

2) Secondo ARISTOTELE il primo sensibile è il πρότερον πρὸς ἡμᾶς, il primo intelligibile il πρότερον τῇ φύσει. Cfr. Anal. post. I, 2.

A seconda che si parte dagli argomenti per arrivare alla tesi, oppure si procede da questa a quelli, abbiamo due specie diverse di argomentazione che si dicono *sintetica* (o progressiva) l'una ed *analitica* (o regressiva) l'altra ¹⁾. Lo schema della prima sarebbe:

$$\begin{array}{r} \alpha > \gamma \\ \alpha < \beta \\ \hline \beta > \gamma \end{array}$$

e tali sono p. es. le dimostrazioni degli elementi di Euclide; lo schema della seconda sarebbe:

$$\begin{array}{r} \beta > \alpha \\ \alpha > \gamma \\ \hline \beta > \gamma \end{array}$$

Così si risolvono p. es. le equazioni nell'algebra: « se il valore x è una radice dell'equazione, esso deve soddisfare alle condizioni richieste; esso soddisfa alle medesime; è dunque una soluzione ».

Si distingue inoltre l'argomentazione *diretta* da quella *indiretta* ²⁾.

Nella prima si dimostra la realtà della tesi — cioè che è $\beta > \gamma$ oppure $\beta = \gamma$ — mediante la realtà degli

1) I termini latini sono, per *compositionem* (da σύνθεσις) e per *resolutionem* (da ἀνάλυσις).

2) Aristotele distingue la dimostrazione in affermativa e negativa (καταφατική καὶ ἀποφατική ἀπόδειξις) e ritiene la prima migliore. *Anal. post.* 1, 25.

argomenti. Nella seconda si dimostra la falsità dell'opposto contraddittorio (β) delle tesi — cioè si dimostra che è $\beta_1 < 1$ oppure $\beta_1 = 0$, da cui per inferenza immediata segue che $\beta > 0$ oppure $\beta = 1$. Questo modo di dimostrare si chiama apagogico ($\acute{\alpha}\pi\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}$) oppure « deductio ad absurdum » ($\epsilon\iota\varsigma \acute{\alpha}\delta\acute{\iota}\nu\alpha\tau\omega\nu \epsilon\iota\varsigma \alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}$) ¹⁾.

Il suo schema sarebbe:

$\beta_1 < \gamma$	oppure	$\beta_1 < \gamma$
$\gamma = 0$		$\gamma < 1$
<hr style="width: 100%;"/>		<hr style="width: 100%;"/>
$\beta_1 = 0$		$\beta_1 < 1$
<hr style="width: 100%;"/>		<hr style="width: 100%;"/>
$\beta = 1$		$\beta > 0$

P. es. s'abbia a dimostrare che *niun essere può produrre sè stesso* (β).

Pongo che un essere produca sè stesso (β); un essere che produce sè stesso dee essere esistente (γ), poichè altrimenti non agirebbe producendo sè stesso: da un'altra parte, questo essere non dee esistere che dopo la sua produzione ($\gamma = 0$); esso esiste dunque prima della sua produzione e non esiste prima della sua produzione. Ciò involve contraddizione. Dalla supposizione dunque, che un essere produce sè stesso, nasce una contraddizione: questa supposizione perciò è falsa ($\beta = 0$); e quindi è vera la sua contraddittoria, cioè che *niun essere può produrre sè stesso* ²⁾.

Lo schema della dimostrazione diretta sarebbe invece

1) ARISTOTELE, Anal. pr. I, 23 o 26.

2) GALLUPPI, op. cit. vol. I p. 120-121.

$\alpha < \beta$	oppure	$\alpha < \beta$
$\alpha > 0$		$\alpha = 1$
$\beta > 0$		$\beta = 1$

« Se è vero α è vero β ; α è talvolta o sempre vero; β è talvolta o sempre vero ». Tali sono le dimostrazioni date più su come esempi.

Sonvi alcune regole pratiche per dare una buona dimostrazione:

Rispetto alla tesi, 1) essa non deve essere un giudizio evidente (*ἀποφαντική*), 2) deve rimanere la stessa in tutta l'argomentazione. Riguardo agli argomenti, 1) essi devono essere veri, 2) certi, 3) adeguati, cioè necessari e sufficienti per la prova della tesi; Riguardo al nerbo dell'argomentazione, esso dev'esser esatto cioè seguire le regole sillogistiche. - Chi non osserva le medesime incorre — volente o nolente — in qualche fallacia d'argomentazione — *sofisma* o *paralogisma*. — Queste fallacie furono accuratamente esaminate ed esposte da ARISTOTELE nel libro *σοφιστικῆς ἐλεγκτικής*. Lui seguirono, nell'enumerazione delle medesime, tutti i logici posteriori.

(Vedi p. es. LINDNER *op. cit.* p. 134-139, CANTONI *op. cit.* vol. I. p. 232-239, BAIX *op. cit.* vol. I. p. 401-407 ecc.); WHATELEY ne cangiò solamente l'ordine; il MILL (*op. cit.* vol. III p. 111-227 (vedi la succinta esposizione che ne fa il BAIX, vol. II p. 544-551) studiò e classificò i sofismi nell'induzione. Cfr. § 33.

CAP. IV

Dottrina sistematica del sillogismo

§ 32. Del metodo in generale — § 33. Del metodo inventivo

§ 34 Del metodo coordinativo ed espositivo.

§ 32. La dottrina sistematica del sillogismo prende in considerazione la realtà del medesimo, in quanto esso fa parte di un sistema ordinato di raziocini. Ora

siccome « concatenando più raziocini col fine di far conoscere distintamente un oggetto qualunque si forma una scienza » ¹⁾, questa parte della logica, chiamata anche dottrina del metodo (da μέθ' ὁδός), si riferirà alle scienze in generale ed alla loro formazione e questa è l'ultima fase del pensare sistematico.

Veramente nell'unità complessa che costituisce una scienza non sempre appaiono come elementi forme sillogistiche complete collegate fra loro: più spesso si tratta di un sistema di nozioni (quantità logiche: concetti, giudizi) relative ad un oggetto. Nelle scienze descrittive o pratiche — che ricercano il « come » (ὅτι) non il « perchè » (διότι) delle cose e degli avvenimenti ²⁾ — p. es. nelle scienze naturali, il metodo non può certo considerarsi come sistema di sillogismi, constando di pure definizioni e classificazioni e, talvolta, d'argomentazioni. Invece nelle scienze propriamente dette (speculative o teoriche) le nozioni appaiono come conclusioni motivate, sillogismi compiuti; ed è in queste che funziona il metodo sistematico.

Un sillogismo è reale in quanto è esatta la conseguenza « se vi è α vi è β », cioè se è rettamente interposto il segno $<$ fra le due quantità. Laonde nel metodo si ha sempre di mira il rapporto di subordinazione (inerenza o causalità) — sul quale vedemmo riposare ed essere costruita tutta la logica — e il principio universale dello stesso, che suona « *subordina il particolare (α) all'universale (β)* — cioè le proprietà alle cose, gli effetti alle cause « — Cfr. § 24.

1) GALLUPPI, *op. cit.*, vol. 1, p. 13.

2) ARISTOTELE (*anal. post.* II, 1) enumera quattro questioni fondamentali: ἤτοι τί ἐστιν ὁ ὅτι, τὸ τί ὁτι, εἰ ἔστιν, τί ἔστιν; le prime due riferentisi agli avvenimenti, le ultime due alle cose; ma poi riunendo la prima e la terza, la seconda o la quarta le riduce alle due domande del come? e del perchè? delle quali la prima è il principio, la seconda il fine delle scienze (*anal. post.* II, 15, 16).

Ora per stabilire questa subordinazione possiamo partire dal particolare (metodo induttivo) o dall'universale (metodo deduttivo) ¹⁾.

Inoltre importa sapere come si possano formare gli universali (principi generali, leggi, verità) partendo dall'esperienza (*metodo inventivo*) e come convenga coordinarli fra loro e sovraordinarli ai particolari, ciò che forma l'oggetto del *metodo coordinativo*. Formate le nozioni motivate e ordinatele sistematicamente rimane ancora da studiare il modo col quale esse debbano esprimersi e comunicarsi ad altri, ciò che costituisce l'oggetto del *metodo espositivo* o didattico, il quale si trova alla linea limite della logica che confina colla pedagogia.

§ 33. I dati dell'esperienza non ci si presentano come giudizi universali: « tutti gli a sono b », ma come fatti singoli, cioè come giudizi particolari od individuali: « alcuni a sono b », « questo a è b ».

Per formare dei giudizi universali con questi dati ci serviamo dell'*induzione* (ἐπαγωγή).

Supponiamo di avere una serie di n giudizi particolari.

$$\begin{array}{l} a < b \\ \quad k \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a = b \\ \quad k \quad k \end{array} = \text{« alcuni } a \text{ »}$$

$$k = 1. 2 \dots n);$$

per un teorema noto sarà anche

1) Vedi § 3, p. 15.

$$\sum_{k=1}^n a < b$$

Ora sono possibili due casi: o la somma Σ è uguale (o maggiore) di una certa classe a , oppure no.

Nel primo caso possiamo scrivere

$$a < b$$

e diciamo « tutti gli a sono b » ed abbiamo formato un giudizio universale pel mezzo induttivo dell'enumerazione completa (*induzione perfetta*).

P. es. chi, dopo aver provato che il circolo, l'ellisse, la parabola e l'iperbola non possono aver più di due punti comuni con una retta, conchiudesse che tutte le sezioni coniche hanno la proprietà di essere segate al più in due punti da una retta, farebbe una induzione perfetta.

Nel secondo caso formiamo un giudizio induttivo per enumerazione incompleta (*induzione imperfetta*) asserendo che « tutti gli a sono b » quando

$$\lim_{k=1}^n \sum a = a$$

col crescere di n .

P. es. sarebbe una induzione imperfetta l'asserire che tutti i corpi possono cangiare il loro stato d'aggregazione, varian-

dove la pressione e la temperatura, dopo aver sperimentato questo per un numero abbastanza grande di corpi. —

Sonvi ancora altre specie di induzione, che però si riducono da ultimo alle precedenti; p. es. quella per *eguaglianze del concludere*. Se dimostro che

$$a < b$$

e so che in eguale maniera posso dimostrare che a, a, \dots, a sono
 $\quad \quad \quad 2 \quad 3 \quad n$
 b; ciò se so che, qualunque sia k è

$$a < b$$

ed è

$$\sum_k a = a$$

induco:

$$a < b.$$

« Di tale specie sono le induzioni della matematica, nella quale per mezzo d'un solo triangolo disegnato sulla tabella, si dimostra un teorema universale colla esplicita o tacita dichiarazione, potersi lo stesso teorema dimostrare in egual modo con qualsiasi altro triangolo » (LAXNER). Nè altrimenti « un mercante di vino ragiona generalizzando, in piccola proporzione, quando trae da una botte di vino soltanto un bicchiere ed inferisce che ogni altro bicchiere, riempito col liquido della stessa botte sarà simile a quella che gli servi di saggio. Ma egli sa che allora il vino era stato tanto ben mescolato da assomigliarsi in tutte le parti esattamente » (JEVONS). — Simile è la cosiddetta *prova da n ad n + 1*, usata nelle matematiche, la quale si fonda sulla nozione della serie numerale continuata. P. es. per provare il teorema del binomio di Newton si dimostra che

se esso vale per lo sviluppo di $(a + b)^n$ vale anche per il caso
 $\quad \quad \quad n+1$
 $(a + b)^{n+1}$. Ora si verifica la sua validità per $(a + b)^1, (a + b)^2, (a + b)^3, \dots$

cioè $n = 2, 3$; quindi se vale per $n = 3$ vale anche per $n = 4$; e quindi per $n = 5, 6, \dots$ e così via.

Il così detto *ragionamento per analogia* nel quale si conclude dal particolare al particolare: p. es. nel giudicare che una data opera dev'essere scritta da un certo scrittore, per la somiglianza che ha nello stile, nel concetto... con altre opere conosciute del medesimo autore — si fonda pure su una induzione (incompleta).

Si vede, da quello che fu detto sinora, quanta sia l'importanza del metodo induttivo per il sapere scientifico. Però fu esagerata da taluni, che pretesero ricavarne la inutilità del metodo opposto, cioè del deduttivo e specialmente del sillogismo. L'obbiezione principale contro di questo sarebbe che la conclusione è già contenuta nelle premesse e quindi non reca nessun reale progresso alla scienza; anzi di fatto la conclusione deve esser conosciuta prima di stabilire le premesse.

P. es. nel sillogismo: « Tutti i pianeti hanno moto rotatorio Marte è un pianeta, dunque Marte ha un moto rotatorio » bisogna comprovare che Marte ha un moto rotatorio, prima di asserire (per induzione) che tutti i pianeti hanno moto rotatorio. — Questa osservazione è giusta per le premesse ricavate mediante *induzione completa*: ma non vale per quelle dedotte per *induzione incompleta* o stabilite quali principi assiomatici; perchè queste possono applicarsi a casi non ancora considerati ed allora la conclusione è veramente una cognizione nuova: p. es. Dimostrandosi nella fisica col calcolo che quando un pendolo si allunga si rallenta il suo movimento, e si conclude che il calore dovrà rallentarne il movimento, perchè ne aumenta la lunghezza. (UEBERWEG). — Sull'importanza del metodo deduttivo del resto convengono tutti i logici. Cfr. MILL *op. cit.* I, 209-212. WUNDT, *Logik*, I, p. 285 segg. SCHRÖDER *Algebra der Logik*, I 174-179 LINDNER *op. cit.*, p. 82-84 CANTONI *op. cit.* I, 209-215. ecc.

L'induzione incompleta è molto più frequente che la completa, avvegnacchè sia difficile conoscere tutti gli individui appartenenti ad una classe o tutte le occasioni nelle quali avviene un dato fenomeno; pertanto il giudizio $a < b$, che su essa si basa non avrà un valore assolutamente categorico, ma soltanto un grado più o meno grande di probabilità. Esso sarà una ipotesi che dovrà venir verificata, oltre che nei casi da

cui fu indotta, ancora nei casi avvenire: potendosi dare un a per il quale non valga il giudizio $a < b$, e così scoprire una istanza che smentisce il giudizio universale & tutti gli a sono b ».

P. es. il pontificato di Pio IX fa un'istanza la quale annullò il « *Non videbis dies sancti Petri in sede apostolica* » cioè la credenza che nessun Papa potesse raggiungere il 25.^o anno in questa dignità.

Il grado di probabilità di un asserto viene misurato da una frazione il cui numeratore è il numero dei casi verificati, il denominatore quello dei casi possibili; nella induzione perfetta tale rapporto è eguale all'unità, che per tal modo esprime la certezza — Cfr. il simbolo 1 come sfera o campo di validità di un giudizio. — Per tanto si distinguono i giudizi in apodittici, assertori e problematici ¹⁾, secondo il valore oggettivo attribuito alla relazione espressa (modalità). I primi esprimono una relazione che vale necessariamente (probabilità = 1), i secondi una relazione che vale realmente, nel momento attuale, i terzi la pura possibilità (> 0) che valga. Un significato analogo hanno i loro negativi, cioè i giudizi non necessari, non reali, impossibili.

I logici moderni sogliono distinguere quattro gradi del ragionamento induttivo:

- I. l'osservazione
- II. l'ipotesi
- III. il ragionamento deduttivo
- IV. la verificaione,

che corrispondono appunto alla formazione dei giudizi universali (ipotesi) coi dati dell'osservazione; alla deduzione di altri giudizi (mediante il sillogismo) ed alla verificaione della ipotesi.

Ma non sempre i dati dell'esperienza ci forniscono giudizi individuali o particolari del tipo

1) Πᾶσα πρότερος ἐστὶν ἢ τοῦ ὑπάρχεν ἢ τοῦ εἶναι ἀνάγκη ὑπάρχεν ἢ τοῦ εἶναι ὑπάρχεν. ARIST. Anal. pr. I, 2.

$$a < b, \\ k$$

bensi, pel principio universale dell'azione scambièvole tra le cose o della causalità tra gli avvenimenti, l'osservazione dei fatti naturali ci dà per risultato un gruppo di numerosi fenomeni speciali (circostanze d'un avvenimento, proprietà singola d'una cosa) quale conseguente (effetto, qualità) di un gruppo precedente. Sieno questi due gruppi o momenti dell'osservazione m ed M :

$$(1) m = abcd. \dots$$

$$(2) M = ABCD. \dots$$

Le singole circostanze sono rappresentate dai fattori a, b, c, \dots e rispettivamente A, B, C, \dots

Noi possiamo asserire, appoggiandosi al principio della ragion sufficiente, che la totalità dei fatti osservati nel momento M è l'effetto dei fatti avvenuti sul momento precedente m , e - basandosi sul principio dell'uniformità della natura (altro modo di enunciare il medesimo principio) - ogni qualvolta avverrà il momento m , succederà invariabilmente il momento M . Quindi scriviamo - Cfr. § 24:

$$m < M$$

ossia

$$abcd. \dots < ABCD. \dots$$

Limitandoci a studiare le cause di un certo fenomeno A , possiamo anche scrivere

— ciò che segue *a fortiori* dalla subordinazione precedente.

Il numero delle cause o circostanze, che più o meno influiscono sul fenomeno da studiarsi, è, di solito, straordinariamente grande, anzi infinito. Essendochè, volendo essere esatti, noi possiamo asserire che, pel principio di causalità, il complesso degli avvenimenti che avvengono nell'universo è causa od effetto del complesso degli avvenimenti immediatamente susseguenti o precedenti (principio cosmologico della conservazione dell'energia: che è pure una speciale annunziazione della legge della ragione sufficiente). E' compito dell'osservatore di limitare convenientemente con metodi speciali d'osservazione e d'esperimento il numero delle circostanze da studiarsi, e di restringerle alle sole sufficienti.

Se il campo di validità dell'avvenimento causa è identico a quello dell'avvenimento effetto cioè se p. es.

$$a = A$$

allora la causa oltre che sufficiente è necessaria per il realizzarsi di A: ogni volta che v'è *a* v'è *A* e viceversa.

Per sapere quale (o quali) delle circostanze *a*, *b*, *c*, . . . sia causa di *A* e quale no, bisogna avere più d'un caso d'osservazione. Il Sig. JOHN STUART MILL ¹⁾ ci dà cinque canoni (che costituiscono i così detti quattro metodi dell'osservazione sperimentale) per stabilire la vera causa di *A*. Questi sono:

I) « Se due o più casi d'un fenomeno da esaminarsi non hanno che una circostanza comune, questa sola circostanza, nella quale i casi combinano, è la causa (o l'effetto) del dato fenomeno. » (Metodo di concordanza).

II) « Se due casi, in uno dei quali si presenta il dato fenomeno o nell'altro no, hanno comuni tutte le circostanze eccetto una, che comparisce nel primo e nell'altro no; questa circostanza per la quale differiscono i due casi è causa (od effetto) o parte necessaria della causa del fenomeno. » (Metodo diretto di differenza).

1) J. S. MILL *op. cit.* vol. II p. 86-110.

III) « Se due o più casi, nei quali avviene il fenomeno hanno una sola circostanza comune; mentre in due o più casi, nei quali il fenomeno non avviene tal circostanza manca; questa circostanza per la quale differiscono le due serie di casi è la causa (o l'effetto) o parte necessaria della causa del fenomeno » (« metodo dei resti ») ¹⁾.

IV) « Si tolga da un fenomeno la parte che, per mezzo di induzioni anteriori, si riconobbe essere effetto di certi antecedenti; il resto del fenomeno è l'effetto dei residui antecedenti (« metodo indiretto di differenza ») ¹⁾.

V) « Ogni fenomeno, che varia in qualche maniera, quando un altro fenomeno varia in certa guisa, è la causa (o l'effetto) di quest'ultimo fenomeno, oppure è connesso in un certo rapporto causale col medesimo. » (« Metodo delle variazioni concomitanti »).

Però questi canoni (chechè ne dica il MILL, *op. cit.* Vol. II, p. 110) non sono i soli mezzi possibili della ricerca sperimentale; e, come m'ingegnerò di mostrare in una prossima memoria, non hanno che un valore relativo e limitato.

Il problema più generale è questo: dato un sistema qualunque di relazioni logiche (casi d'osservazione), in cui entri una data quantità *A*, trovare di quali quantità essa è data indipendentemente (a mezzo della *eliminazione* di codeste) e di quali è funzione (a mezzo della *risoluzione*): questo problema è lo stesso problema fondamentale per la dottrina elementare (cfr. Parte I, Cap. IV).

I metodi di J. S. Mill accennano appunto a casi speciali di tali risoluzioni od eliminazioni, ma in un modo non sempre esatto.

§ 34. Si disse (§ 32) che nell'ordinamento delle nozioni in quel complesso che forma la scienza, vale il principio: subordina il particolare all'universale; e per-

1) Questo canone ed il precedente costituiscono, secondo il MILL, « un metodo solo.

tanto questo ordinamento si riduce ad una classificazione motivata, ad una collocazione di individui (quantità logiche minori: cause o cose) in classi (quantità logiche maggiori: effetti o proprietà) le quali, è noto, li comprendono.

Ricordandoci della possibilità di rappresentare graficamente le quantità logiche (Cfr. §§ 9, 29), questa collocazione consisterà nel situare una quantità data nel luogo che la contiene, oppure nel fissare un punto mediante le sue coordinate (nelle quali essendo compreso, ne è l'intersezione). Laonde l'ordinamento sistematico delle nostre nozioni avrà una adeguata rappresentazione nella disposizione o configurazione di una serie di punti od estensioni nello spazio.

Di queste configurazioni sono specialmente notevoli: *le rette parallele* le quali rappresentano p. es. il metodo sincronistico od il cronologico (secondo che sono orizzontali o verticali, supponendo orizzontale la linea temporale); *le rette convergenti*, che rappresentano il metodo sintetico, e *le rette divergenti* che rappresentano il metodo analitico ¹⁾. La sinossi ed altri schemi p. es. l'albero porfiriano ²⁾; i cerchi concentrici, rappresentano le subordinazioni delle nozioni in una scienza, hanno il loro fondamento sulla medesima rappresentazione grafica dello spazio logico. — Però queste configurazioni non sono di solito così semplici, ma sono reti o tessuti complicati di cognizioni che costituiscono il sistema.

.....
1) Di queste configurazioni tratto nel mio lavoro intorno al metodo che spero di pubblicare tra breve.

2) In questo, partendo dalla base costituita dal genere generalissimo (γένος γενικώτατον) ad esempio il concetto οὐσία, vanno mano a mano diramandosi i generi speciali (γένος καὶ εἶδος) p. es. i concetti di τὸ μὲν, ἐμφύλον, ζῶον, ζῶον λογικόν, finendo colla specie specialissima (τὸ εἰδικώτατον εἶδος) p. es. ἀνθρώπος e da ultimo cogli individui particolari (μέρος, άτομον): Σωκράτης. Porfirio Isag. cap. III (περὶ εἶδους).

Un'altra questione di cui s'occupa la logica è: come si esprime e si comunica ad altri un sistema scientifico? Qui bisogna rilevare innanzi tutto un fatto importante: che nel parlare o in generale nel pensare psicologico, noi non possiamo cogliere un sistema completo di nozioni nè intuirne le loro molteplici relazioni sibbene son presenti singole nozioni e cogliamo una relazione alla volta. — La nostra mente passa *successivamente* da un'idea ad un'altra, subordina una nozione ad un'altra così che forma una serie di successioni temporali, il *filo* del discorso o del pensiero. Pertanto nello studio del metodo espositivo si considererà lo svolgimento dei sistemi di nozioni nella linea ideale del tempo: cioè si guarderà l'ordine col quale si enunzieranno i fatti l'un dopo l'altro — mentre nella nostra mente sono coesistenti.

Si hanno adunque due ordinamenti, uno di nozioni in quanto son fra loro connesse logicamente, cioè in quanto sono collocate nello spazio logico; l'altro delle nozioni — colte in questo spazio logico — in quanto sono disposte nel tempo psicologico. Del primo esclusivamente s'occupa il metodo coordinativo o sistematico, d'entrambi l'espositivo.

Rappresentante su due coordinate (asse delle x e delle y) questi ordinamenti, e cioè sull'*ordinata* (y) la posizione nello spazio logico, sull'*ascissa* (x) il tempo; il *filo del discorso* ci apparirà come una curva che segnerà col suo elevarsi od abbassarsi il successivo cambiamento o passaggio di una nozione ad un'altra. — Astruendo dalla successione temporale, resta l'ordinamento spaziale logico, cioè per avere la configurazione (rete, tessuto) logica del sistema esposto bisogna proiettare la curva in un piano verticale al piano xy e parallelo all'asse y .

Nell'ordine (temporale) col quale si susseguono le idee in un discorso o in un trattato, possiamo distinguere due casi: o tale ordine è invertibile cioè le idee che vengono una *dopo* l'altra possono anche stare una *prima* dell'altra, ciò non influendo menomamente per il contenuto del tutto. Allora le nozioni stanno una accanto l'altra (nello spazio logico), sono semplicemente coordinate. Tali sono le nozioni nelle scienze descrittive. Se l'ordine non è invertibile, ma una nozione *dove* venir prima dell'altra, tra esse intercede il rapporto di subordinazione. Tali sono le nozioni nelle scienze speculative.

La distinzione in metodo storico ed in metodo psicologico-genetico (Cfr. LANDNER *op. cit.* p. 160 seg.) sembra doversi abbandonare perchè fondata su motivi extra-logicali. D'altra parte mi riservo di trattare altrove (vedi nota 1 alla pag. prec.) più diffusamente su questo argomento, che è già al limite della logica e sta per toccare la psicologia e la didattica.

AGGIUNTE E CORREZIONI

Per motivi indipendenti dalla mia volontà, vi fu un sensibile ritardo nella pubblicazione di questo libro, iniziata ancor l'anno scorso; così che ora dovrei modificare qua e là alcune cose; specialmente pel fatto che nel frattempo comparso la prima parte del II volume dell'opera dello SCHÜPFER (*Algebra der Logik*), nella quale è trattata la teoria del giudizio e del sillogismo. Ad ogni modo tenni conto di quest'opera nelle note e negli esercizi ai capitoli III e IV. Prego intine di voler rettificare i seguenti errori, che sfuggirono alla correzione delle bozze:

ERRATA CORRIGE

A pag. 12	lin. 11-12	dall'ultima	invece di « definito »	leggasi « definita »
» 18	» ult.	{	» « altre »	» « altri »
» 19	» prima			
» 26	» 12	dall'ultima	» « esse »	» « esso »
» 31	» 7	della prima	»	» 21, 22, 21
» 36	» penult. (in nota)	»	» « tha »	» « the »
» 38	» penultima	»	» « VENS »	» « VENS »
» 47	» ultima	»	» « tautologia »	» « tautologia »
» 49	» 8	della prima	» « esprimone »	» « esprimano »
» 55	» 3-4	dall'ultima	inseriscasi « <i>Esercizi e problemi</i> »	
» 55	» 4		invece di « Giudizi »	» « § 15, Giudizi »
» 57	» 3	dall'ultima	tolgasi « se ne daranno esempi negli esercizi »	
» 64	» 4	dalla prima	invece di « negati »	leggasi « <i>negatio</i> »
» 73	» 9	» »	» « delle altre »	» « una delle altre »
» 78	» 8	dall'ultima	» $>, 0,$	» $> 0,$
» 112	» 3-4	»	inseriscasi « <i>Esercizi e problemi</i> »	
» 116	» 10	dalla prima	invece di « delle »	leggasi « <i>colle</i> »
» 123	» 2 dall'ult. (in nota)	»	» « Σημειώσεις »	» « Σημειώσεις »
» 137	» 4	dalla prima	» « <i>Comestres</i> »	» « <i>Comestrops</i> »
» 154	» 2 dall'ult. (in nota)	invece di « <i>deutscher naturforscher</i> » leggasi « <i>deutscher Naturforscher</i> »		

A pag 157 lin. 9 dalla prima invece di > 1 leggasi < 1

» » » 12 » » » $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ leggasi $f(x_1 x_2 \dots x_n)$

» » » 13 » » » $\Sigma(x_1 x_2 \dots x_n)$ » $\Sigma(x_1 x_2 \dots x_n)$

» » » 15 » » » $\Sigma(x_1 x_2 \dots x_n)$ » $\Sigma(x_1 x_2 \dots x_n)$

» 159 » 7 » » » $f(0) f(1) \dots f(n)$ leggasi

$f(0) f(1) \dots f(n)$

» 182 » 10 dall'ultima tolgasi « 1 »

» 185 » penultima invece di $\sum_{k=1}^{m+1}$ leggasi $\sum_{k=1}^{m+1}$

$k=1$

INDICE

Prefazione da pag. 3 a pag. 9

Introduzione

§ 1 Definizione	»	11	»	12
§ 2 Còmputo e direzioni	»	12	»	13
§ 3 Divisione e metodi di studio della logica	»	13	»	15

PARTE I - DELLE FORME ELEMENTARI

Cap. 1. *Teoria generale*

§ 4 Definizione e classificazione delle forme elementari	»	17	»	18
§ 5 Metodo di pertrattarle; forme primitive e forme derivate	»	18	»	19

Cap. 2. *Dottrina del concetto*

§ 6 Definizione	»	20	»	21
§ 7 Distinzione del concetto	»	21	»	29
§ 8 Relazioni ed operazioni coi concetti	»	29	»	37
§ 9 Rappresentazione grafica	»	37	»	38
§ 10 Categoria ed elementi	»	38	»	46
Esercizi e problemi	»	46	»	55

Cap. 3. *Dottrina del giudizio*

§ 11 Definizione del giudizio	»	55	»	61
§ 12 Distinzioni	»	61	»	67
§ 13 Relazioni dei giudizi	»	67	»	70

§ 14 Operazioni coi giudizi	da pag. 70 a pag. 79	
§ 15 Giudizi composti	» 79 » 86	
§ 16 Problema di Jevons e Clifford	» 86 » 102	
Esercizi e problemi	» 102 » 112	
Cap. 4. <i>Dottrina del sillogismo</i>		
§ 17 Definizione	» 112 » 115	
§ 18 Distinzioni del sillogismo	» 115 » 118	
§ 19 Trasformazione e risoluzione delle relazioni elementari	» 118 » 128	
§ 20 Eliminazioni delle relazioni elementari » 128 » 148		
§ 21 Trasformazione, risoluzione ed eliminazione delle relazioni composte	» 148 » 156	
Esercizi e problemi	» 156 » 164	
Cap. 5. <i>Dottrina delle leggi del pensiero</i>		
§ 22 Le leggi del pensiero in generale, loro funzione nella logica e metodo di studio delle medesime	» 164 » 166	
§ 23 Leggi delle quantità logiche universali particolari ed individuali	» 166 » 172	
§ 24 Leggi delle relazioni delle quantità logiche	» 172 » 177	
§ 25 Leggi delle operazioni colle quantità logiche	» 177 » 178	

PARTE II - DELLE FORME SISTEMATICHE

Cap. 1. *Teoria generale*

§ 26 Definizione delle forme sistematiche e loro connessione con le forme elementari	» 179 » 180
§ 27 Classificazione e metodo di studio delle forme sistematiche	» 180 » 183

Cap. 2. *Dottrina sistematica del concetto*

§ 28 Teoria generale	da pag. 183 a pag. 188	219
§ 29 Teoria della definizione	» 188 » 192	192
§ 30 Teoria della divisione	» 192 » 197	197
Cap. 3. <i>Dottrina sistematica del giudizio</i>		
§ 31 Dell'argomentazione	» 197 » 202	202
Cap. 4. <i>Dottrina sistematica del sillogismo</i>		
§ 32 Del metodo in generale	» 202 » 204	204
§ 33 Del metodo inventivo	» 204 » 211	211
§ 34 Del metodo coordinativo ed espositivo »	211 » 214	214
<i>Aggiunte e correzioni</i>	» 215 » 216	216

